Université Paris Diderot — Année 2007/08

L3 Maths Appliquées (31M23030) — Analyse de Hilbert et de Fourier

Corrigé du devoir à la maison n° 3

On considère une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ayant les propriétés suivantes :
- $\omega_{-n} = -\omega_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,
- *la suite* $(\omega_n)_{n\geqslant 1}$ *est positive, décroissante, tendant vers* 0,
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\omega_n}{n} = +\infty$.

Un remarque préliminaire : il existe bien une suite (ω_n) ayant les propriétés ci-dessus. Il suffit de poser

$$\omega_n = \frac{\operatorname{sgn}(n)}{\ln(|n|+2)}\,.$$

On rappelle que la fonction : $y \mapsto \varphi(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{\sin u}{u}\,du$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$ *et admet une limite finie en* $+\infty$. *On définit les suites de fonctions* $(F_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *comme suit :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\,, \quad S_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \omega_j e^{ijx}\,.$$

1) *Établir les formules trigonométriques :*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\,\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,.$$

pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

En posant $U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$, il vient

$$U_n = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)} = -i\,\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Du coup

$$\Re(U_n) = \Im\left(\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin\frac{x}{2}\right)\,,$$

ce qui donne la première formule. On a aussi

$$U_n = \frac{e^{i\frac{nx}{2}}\left(e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{-(n+1)x}{2}}\right)}{2i\sin\frac{x}{2}} = e^{i\frac{nx}{2}}\,\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,.$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient la seconde formule.

2) *Montrer que la fonction* $h :]0, \pi] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$h(t) = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{2}{t}$$

se prolonge par continuité en 0.

On part du DL en 0 de la fonction sinus : $\sin t = t + o(t^2)$, d'où on déduit

$$\frac{t}{\sin t} = 1 + o(t)$$

et donc

$$h(t) = \frac{2}{t}\left(\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} - 1\right) = \frac{o(t)}{t}\,.$$

ce qui montre que $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$.

3) *À l'aide des questions précédentes montrer que, pour tout* $x \in [0, \pi]$,

a) la suite $(F_n(x))_{n\geqslant 1}$ *est convergente,*

b) $|F_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} |h(t)|\,dt + \|\varphi\|_\infty$.

On a

$$F_n(x) = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n \cos kt\right) dt = \int_0^x \left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right) dt\,,$$

d'où

$$F_n(x) = \frac{1}{2}\int_0^x h(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,dt + \varphi\big((n+\frac{1}{2})x\big) - \frac{x}{2}\,,$$

ce qui implique le b). On a de plus

$$\int_0^x h(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,dt = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{int}e^{it/2}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)h(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int}e^{-it/2}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)h(t)\,dt\,,$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Finalement si $\lambda = \lim_{y\to+\infty}\varphi(y)$, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = -\frac{x}{2} + \lambda\,.$$

Notons que la fonction F_n étant 2π-périodique et impaire, on a montré ainsi l'existence de $C > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geqslant 1 \quad |F_n(x)| \leqslant C$$

et la convergence simple de la suite de fonctions $(F_n)_{n\geqslant 1}$ sur $\mathbb{R}$.

4) *Soit* $f \in L^1_{2\pi}$. *Montrer que, pour tout entier* $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(c_k(f) - c_{-k}(f)\right) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)F_n(x)dx\,;$$

en déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right)$ *est convergente.*

Par définition des coefficients de Fourier, on a

$$\frac{1}{k}\left(c_k(f) - c_{-k}(f)\right) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\frac{\sin kx}{k}dx\,,$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(c_k(f) - c_{-k}(f)\right) = \frac{1}{i\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)F_n(x)dx\,.$$

On peut appliquer à cette suite d'intégrales le théorème de convergence dominée. En effet, d'après la question 3),

- la suite $(f(x)F_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge pour tout x,
- on a $|fF_n| \leqslant C|f|$ et la fonction $|f|$ est, par hypothèse, intégrable sur $[-\pi, +\pi]$.

5) *Montrer qu'il n'existe pas de fonction* $f \in L^1_{2\pi}$ *telle que* $c_n(f) = \omega_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

S'il existait une telle fonction f, on aurait $c_n(f) - c_{-n}(f) = 2\omega_n$ et le résultat de la question précédente contredirait la divergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\omega_n}{n}$.

6) *Montrer que, pour tout* $x \in]0, \pi]$ *et tous entiers* $n > m \geqslant 0$, *on a*

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leqslant \frac{4\omega_{m+1}}{\sin(x/2)}\,.$$

En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 0}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *; on désignera par* g *sa limite.*

Puisque la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est impaire, on a

$$\forall n \geqslant 1 \quad S_n(x) = 2i\sum_{k=1}^{n} \omega_k \sin kx\,.$$

Posons

$$A_n(x) = 2i\sum_{k=1}^{n} \sin kx \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1\,, \quad A_0(x) = 0\,.$$

D'après la question 1), on a

$$|A_n(x)| \leqslant \frac{2}{\sin(x/2)}\,.$$

Pour $n > m \geqslant 0$, on a

$$S_n(x) - S_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} \omega_k (A_k(x) - A_{k-1}(x))$$

$$= \omega_n A_n(x) - \omega_{m+1} A_m(x) + \sum_{k=m+1}^{n-1} (\omega_k - \omega_{k+1}) A_k(x) \,.$$

En tenant compte du fait que la suite $(\omega_n)_{n\geqslant 1}$ est positive décroissante, il vient

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leqslant \frac{2}{\sin(x/2)} \left(\omega_n + \omega_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} (\omega_k - \omega_{k+1}) \right) ,$$

ce qui donne l'inégalité souhaitée. Ainsi $(S_n(x))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc une suite convergente. Puisque S_n est une fonction 2π-périodique impaire, on obtient la convergence simple sur $\mathbb{R}$ tout entier.

7) *Montrer que g est une fonction 2π-périodique n'appartenant pas à $L^1_{2\pi}$.*

Pour établir que g n'est pas intégrable, on va montrer que, si elle l'était, on aurait $c_n(g) = \omega_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On retombe ainsi sur la contradiction précédente.

On utilisera les deux inégalités élémentaires suivantes :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |e^{iu} - 1| \leqslant |u| \,; \quad |\sin u| \geqslant \frac{2}{\pi}|u| \quad \text{pour} \quad |u| \leqslant \frac{\pi}{2} \,.$$

D'après la question précédente (en faisant $m = 0$), on a

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \quad |S_n(x)| \leqslant \frac{4\omega_1}{|\sin(x/2)|} \,.$$

Fixons $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$|S_n(x)(e^{-ikx} - 1)| \leqslant 4\omega_1 \pi |k| \,;$$

le théorème de convergence dominée implique

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_n(x)(e^{-ikx} - 1) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)(e^{-ikx} - 1) dx \,;$$

le fait que S_n est impaire nous donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_n(x)(e^{-ikx} - 1) dx = c_k(S_n) = \omega_k \quad \text{pour } n \geqslant |k| \,;$$

Puisque g est elle-même impaire et supposée intégrable, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)(e^{-ikx} - 1) \, dx = c_k(g) \quad \textit{(C.Q.F.D.)}$$