Université Paris Diderot
L3 Maths Appliquées (31M23030)

Année 2007/08
Analyse de Hilbert et de Fourier

DM4 (Révisions)

Notation : On pose $\tau_a f(x) = f(x-a)$, pour tous $a, x \in \mathbb{R}$ et toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Pour $p = 1$ ou $p = 2$, et $r > 0$, on note $\mathcal{E}_p(r)$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle $\widehat{f}$ est nulle p.p. en dehors de l'intervalle $[-r, r]$.
On se propose d'établir les inégalités de *Bernstein* :

$$\forall r > 0\,,\ \forall j \in \mathbb{N}\,,\ \forall f \in \mathcal{E}_p(r) \quad \|f^{(j)}\|_p \leqslant r^j \|f\|_p\,.$$

Soit h la fonction 2π-périodique, impaire, telle que

$$h(x) = x \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad , \quad h(x) = \pi - x \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\,.$$

1) Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. On suppose que

$$(\star) \qquad \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)|\widehat{f}(\xi)|\, d\xi < +\infty\,.$$

Montrer qu'il existe une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 à l'infini, telle que $f(x) = g(x)$ presque partout

2) Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que f possède la propriété $(\star)$.
Tout élément de $\mathcal{E}_p(r)$ a donc un unique représentant de classe C^1 et on pourra sans inconvénient considérer $\mathcal{E}_p(r)$ comme un sous-espace de $C_0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$.

3) Dessiner le graphe de h sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ et établir les formules suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{2i}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)x}\,; \qquad \frac{\pi^2}{4} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2}\,.$$

4) Soit une fonction $f \in \mathcal{E}_p(\pi/2)$.
a) Montrer que la série de fonctions

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\, \tau_{-2k-1} f$$

converge dans $L^p(\mathbb{R})$ et dans $C_0(\mathbb{R})$.
On désignera par g la somme de cette série ; g est donc un élément de $L^p(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$.
b) Exprimer la transformée de Fourier de g à l'aide de celle de f. En déduire que $f' = g$ et que $\|f'\|_p \leqslant \frac{\pi}{2}\|f\|_p$.

5) Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que f est une fonction de classe C^∞ et établir l'inégalité de Bernstein. *Indications :* (i) se ramener à $r = \pi/2$ par un changement de variable, (ii) raisonner par récurrence sur j.

6) Soit u une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ nulle en dehors de l'intervalle $[-1, 1]$. Soit φ la transformée de Fourier inverse de u, i.e.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} u(\xi)\, d\xi\,.$$

a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{E}_p(1)$.
b) Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on pose $f_\varepsilon(x) = e^{i(1-\varepsilon)x}\varphi(\varepsilon x)$. Montrer que $f_\varepsilon \in \mathcal{E}_p(1)$ et calculer

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|f_\varepsilon^{(j)}\|_p}{\|f_\varepsilon\|_p}\,,$$

pour tout entier $j \geqslant 1$. En déduire que l'inégalité de Bernstein ne peut être améliorée.