Université Paris Diderot | Année 2007/08
L3 Maths Appliquées (31M23030) | Analyse de Hilbert et de Fourier

Corrigé du DM4

On pose $\tau_a f(x) = f(x-a)$, pour tous $a, x \in \mathbb{R}$ et toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Pour $p = 1$ ou $p = 2$, et $r > 0$, on note $\mathcal{E}_p(r)$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R})$ telle $\widehat{f}$ est nulle p.p. en dehors de l'intervalle $[-r, r]$.
Soit h la fonction 2π-périodique, impaire, telle que

$$h(x) = x \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad , \quad h(x) = \pi - x \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi\,.$$

1) *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. On suppose que*

$$(\star) \qquad \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)|\widehat{f}(\xi)|\,d\xi < +\infty\,.$$

Montrer qu'il existe une fonction g de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 à l'infini, telle que $f(x) = g(x)$ presque partout.

La condition $(\star)$ exprime que les fonctions $\widehat{f}$ et $\xi \mapsto \xi\,\widehat{f}(\xi)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème d'inversion de Fourier, on voit que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \widehat{f}(\xi)\,d\xi$$

appartient à $C_0(\mathbb{R})$ et est égale presque partout à f. Pour établir que g est de classe C^1, on applique le théorème de dérivation à l'intégrale qui définit g. C'est possible car on dispose de la domination

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \widehat{f}(\xi) \right) \right| = \left| \mathrm{i}\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} \widehat{f}(\xi) \right| = |\xi\,\widehat{f}(\xi)|\,.$$

2) *Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que f possède la propriété $(\star)$.*

Dans le cas $p = 1$, on a $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1$ pour tout ξ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)|\widehat{f}(\xi)|\,d\xi \leqslant \|f\|_1 \int_{-r}^{r} (1 + |\xi|)\,d\xi < +\infty\,.$$

Dans le cas $p = 2$, on a $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et donc, par Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)|\widehat{f}(\xi)|\,d\xi \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{-r}^{r} (1 + |\xi|)^2\,d\xi \right)^{1/2} < +\infty\,.$$

On considère désormais $\mathcal{E}_p(r)$ comme un sous-espace de $C_0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$.

3) *Établir les formules suivantes :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \frac{2\mathrm{i}}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)x}\,; \qquad \frac{\pi^2}{4} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2}\,.$$

Puisque h est impaire, on a

$$c_n(h) = -\frac{\mathrm{i}}{\pi} \int_0^{\pi} h(x) \sin nx\,dx\,.$$

Ensuite par le changement de variable $x = \pi - t$ pour $x \in [\pi/2, \pi]$, on obtient

$$c_n(h) = -\frac{\mathrm{i}}{\pi}(1 + (-1)^n) \int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx \, .$$

Il vient donc $c_n(h) = 0$ si n est pair, et, après intégration par parties :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_{2k+1}(h) = \frac{2\mathrm{i}}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \, .$$

Puisque h est continue sur $\mathbb{R}$ et qu'on a $\sum |c_n(h)| < +\infty$, on peut conclure que h est partout la somme de sa série de Fourier, ce qui donne la première égalité ; la seconde s'obtient en faisant $x = \pi/2$ dans la première.

4) *Soit une fonction $f \in \mathcal{E}_p(\pi/2)$.*

a) *Montrer que la série de fonctions*

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \, \tau_{-2k-1} f$$

converge dans $L^p(\mathbb{R})$ et dans $C_0(\mathbb{R})$.

Dans un espace normé complet tel que $L^p(\mathbb{R})$ ou $C_0(\mathbb{R})$, une série de vecteurs $\sum_k f_k$ est convergente dès que $\sum \|f_k\| < +\infty$. C'est le cas pour notre série puisque

$$\left\| \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \, \tau_{-2k-1} f \right\| = \frac{1}{(2k+1)^2} \|f\| \, ,$$

que la norme soit $\| - \|_p$ ou $\| - \|_\infty$.

On désignera par g la somme de cette série.

b) *Exprimer la transformée de Fourier de g à l'aide de celle de f. En déduire que $f' = g$ et que $\|f'\|_p \leqslant \dfrac{\pi}{2} \|f\|_p$.*

La transformation de Fourier étant linéaire et continue respectivement de L_1 dans C_0 et de L_2 dans lui-même, on a

$$\widehat{g}(\xi) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)\xi} \widehat{f}(\xi) \, ,$$

la convergence de cette série s'entendant respectivement dans C_0 et L_2. Compte tenu de la question 3) et du fait que $h(\xi) = \xi$ là où $\widehat{f}$ ne s'annule pas, il vient donc $\widehat{g}(\xi) = \mathrm{i}h(\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi)$ presque partout. Par injectivité de la transformation de Fourier, on en déduit que $f' = g$, puis que

$$\|f'\|_p \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \, \tau_{-2k-1} f \right\|_p = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} \|f\|_p = \frac{\pi}{2} \|f\|_p \, .$$

5) *Soit $f \in \mathcal{E}_p(r)$. Montrer que f est une fonction de classe C^∞ et établir l'inégalité de Bernstein.*

Posons $g(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2r} x\right)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall \xi \mathbb{R} \quad \widehat{g}(\xi) = \frac{2r}{\pi} \widehat{f}\left(\frac{2r}{\pi} \xi\right) \, ,$$

de sorte que $\widehat{g}$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. En appliquant à g la question 4) et en notant que

$$\|g\|_p = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{-1/p} \|f\|_p \quad \text{et} \quad \|g'\|_p = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{-(1/p)+1} \|f'\|_p \, ,$$

on obtient l'inégalité

$$\|f'\|_p \leqslant r\|f\|_p\,.$$

Maintenant raisonnons par récurrence. On vient de prouver l'inégalité de Bernstein pour $j=1$. Supposons-la vraie pour l'entier $j>1$. On constate que la fonction $f^{(j)}$ appartient à $\mathcal{E}_p(r)$: en lui appliquant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\|f^{(j+1)}\|_p \leqslant r\|f^{(j)}\|_p \leqslant r^{j+1}\|f\|_p\,,$$

c'est-à-dire la propriété souhaitée au rang $j+1$.

6) *Soit u une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ nulle en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. Soit φ la transformée de Fourier inverse de u, i.e.*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}u(\xi)\,d\xi\,.$$

a) *Montrer que $\varphi \in \mathcal{E}_p(1)$.*

La fonction φ est la transformée de Fourier inverse de u. Puisque u appartient évidemment à L^2, il en est de même pour φ ; de plus $\widehat{\varphi} = u$, ce qui montre que $\varphi \in \mathcal{E}_2(1)$.

Comme la fonction $u - u''$ appartient à L^1, sa transformée de Fourier inverse, à savoir la fonction $x \mapsto (1+x^2)\varphi(x)$, est bornée sur $\mathbb{R}$. On déduit que, pour une certaine constante $\alpha > 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(x)| \leqslant \frac{\alpha}{1+x^2}$$

et donc que $\varphi \in L^1$. On obtient ainsi $\varphi \in \mathcal{E}_1(1)$.

b) *Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on pose $f_\varepsilon(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)x}\varphi(\varepsilon x)$. Montrer que $f_\varepsilon \in \mathcal{E}_p(1)$ et calculer*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|f_\varepsilon^{(j)}\|_p}{\|f_\varepsilon\|_p}\,,$$

pour tout entier $j \geqslant 1$. En déduire que l'inégalité de Bernstein ne peut être améliorée.

On a

$$\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}u\left(\frac{\xi-(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\,,$$

ce qui implique que $\widehat{f_\varepsilon}$ est nulle en dehors de l'intervalle $[1-2\varepsilon,1]$, a fortiori en dehors de l'intervalle $[-1,1]$. On a aussitôt $\|f_\varepsilon\|_p = \varepsilon^{-1/p}\|\varphi\|_p$. À l'aide de la formule de Leibniz, on écrit

$$f_\varepsilon^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{j} C_k^j\,(\mathrm{i}(1-\varepsilon))^k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\varepsilon)x}\varepsilon^{j-k}\varphi^{(j-k)}(\varepsilon x)\,.$$

On note alors que, du point de vue de la norme L^p, c'est le terme $k=j$ qui est dominant dans l'expression ci-dessus. On a, plus précisément,

$$\left|\|f_\varepsilon^{(j)}\|_p - \varepsilon^{-1/p}(1-\varepsilon)^j\|\varphi\|_p\right| \leqslant \sum_{k=0}^{j-1} C_k^j(1-\varepsilon)^k\varepsilon^{j-k}\varepsilon^{-1/p}\|\varphi^{(j-k)}\|_p \leqslant \alpha_j\varepsilon^{1-(1/p)}\,,$$

pour une certaine constante α_j. On en déduit que

$$\left|\|f_\varepsilon^{(j)}\|_p\|f_\varepsilon\|_p^{-1} - (1-\varepsilon)^j\right| \leqslant \alpha_j\|\varphi\|_p^{-1}\varepsilon\,,$$

et donc que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|f_\varepsilon^{(j)}\|_p}{\|f_\varepsilon\|_p} = 1\,.$$