Université Paris Diderot
L3 Maths Appliquées (31M23030)

Année 2007/08
Analyse de Hilbert et de Fourier

Série n°1 : Révisions d'Intégration

$\mathbb{R}^n$ et ses sous-ensembles sont munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, notée λ_n.

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
   a) Montrer que si $\lambda_n(\Omega) = 0$ alors $\Omega = \emptyset$. *Indication : raisonner par contraposition.*
   b) Montrer que, si $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \Omega$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.
   c) Montrer que $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ si et seulement si f est une fonction bornée et que, dans ce cas,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| \,.$$

2) Soit $T > 0$, $\alpha \in]0, 1]$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue de période T.
   a) Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \,.$$

   On *suppose désormais que* $\int_0^T f(x)\,dx = 0$ et, dans le cas $\alpha = 1$, que f est lipschitzienne et que $f(0) = 0$.
   b) Montrer que f admet une primitive g qui est elle-même de période T.
   c) Montrer que f et g sont des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.
   d) Montrer l'existence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx \,.$$

   Indication : faire une intégration par parties utilisant la fonction g.
   e) Montrer que si $f \neq 0$, alors

$$\int_0^\infty \frac{|f(x)|}{x^\alpha} dx = +\infty \,,$$

   en d'autres termes : que l'intégrale généralisée de la question précédente n'est pas une intégrale de Lebesgue.

3) Soit A un pavé (ou une boule) de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur A, à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $[0, +\infty]$. On suppose qu'il existe $a \in A$ tel que f soit continue sur $A \setminus \{a\}$. Montrer que f est une fonction borélienne.

4) a) Soit t un réel fixé. Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-xt} \sin x$.
   b) En remarquant que $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$, pour tout $x > 0$, et en utilisant le théorème de Fubini, donner une expression de l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx$, pour tout $A > 0$.
   c) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \,.$$

5) Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

a) Soit f une fonction intégrable sur I. Une fonction F définie sur I s'appelle une *primitive généralisée* de f sur I si on a

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f(x)\, dx\,,$$

pour tous réels u, v tels que $a \leqslant u < v \leqslant b$.

- Expliquer le choix de cette terminologie.
- Montrer que la fonction f admet une infinité de primitives généralisées, deux d'entre elles différant d'une constante.
- Montrer qu'une primitive généralisée de f est nécessairement continue sur I.

b) Soient f, g deux fonctions intégrables sur I. Soient F et G des primitives généralisées de f et g respectivement. À l'aide du théorème de Fubini, établir la formule d'*intégration par parties* :

$$\int_a^b f(x)G(x)\, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)\, dx\,.$$

6) On définit la fonction $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0)\,; \quad f(0, 0) = 0\,.$$

a) Montrer que f est une fonction borélienne. *Indication : utiliser l'exercice 3.*

b) On pose

$$\forall x \geqslant 0 \quad \varphi(x) = \int_0^x \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}\, dt\,.$$

Montrer que φ est une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continûment dérivable. Montrer que $\varphi(x) = \varphi(1/x) > 0$, pour tout $x > 0$.

c) Montrer que $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} |f(x, y)|\, dx\, dy = +\infty$. *Indication : utiliser la fonction φ, ainsi que le théorème de Fubini.*

d) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$, les fonctions $y \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(y, x)$ sont intégrables sur $[0, 1]$. *On posera*

$$\forall x \in]0, 1] \quad g(x) = \int_0^1 f(x, y) dy \quad , \quad h(x) = \int_0^1 f(y, x) dy\,.$$

e) Exprimer g à l'aide de φ. En déduire que les fonctions g et h, sont continues sur $]0, 1]$ et se prolongent par continuité en 0.

f) Établir l'égalité

$$\int_0^1 g(x)\, dx = -\int_0^1 h(x)\, dx\,.$$

Montrer (pour la seconde fois...) que la fonction f n'est pas intégrable.