Université Paris Diderot
L3 Maths Appliquées (31M23030)

Année 2007/08
Analyse de Hilbert et de Fourier

Série n°2 : Fourier sur L^1

Certains des exercices utilisent dès à présent l'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$. On rappelle que la *fonction Gamma* est définie sur sur $]0,+\infty[$ par : $\Gamma(a) = \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,dx$. On utilise les notations du cours de B.Maurey, notamment les fonctions K_τ, voir page 10

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
   a) Écrire $\widehat{f}$ à l'aide des fonctions sinus et cosinus. En déduire des expressions alternatives de $\widehat{f}$ dans le cas ou f est paire ou impaire.
   b) On définit la fonction g par : $g(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Exprimer la transformée de Fourier de g en fonction de celle de f. Que peut-on dire de $\widehat{f}$ si f est paire ? impaire ? Retrouver ainsi les résultats de la question précédente.
   c) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{-x}1\!\!1_{[0,+\infty[(x)}$. En déduire celle de $h(x) = e^{-|x|}$.
   d) Déduire de c) la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
   e) Calculer le produit de convolution $h \star h$ et en déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto (\dfrac{1}{1+x^2})^2$.

2) Soit f la fonction indicatrice de l'intervalle $[-1,1]$. Calculer $\widehat{f}$ et $f \star f$. En déduire les transformées de Fourier des fonctions $x \mapsto (1-|x|)\,1\!\!1_{[-1,1]}(x)$ et $x \mapsto (\dfrac{\sin x}{x})^2$.

3) Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction e_a sur $\mathbb{R}$ par : $e_a(x) = e^{iax}$.
   Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, on définit les fonctions $\tau_a f$ $(a \in \mathbb{R})$ et $\theta_\lambda f$ $(\lambda > 0)$ par :
   $$\tau_a f(x) = f(x-a) \qquad \text{et} \qquad \theta_\lambda f(x) = f(\lambda x).$$
   Enfin $\bar{f}$ désigne la fonction complexe conjuguée de f.
   a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer les relations suivantes (où $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$) :
   $$\text{(i) } \widehat{e_a.f} = \tau_a\widehat{f}, \qquad \text{(ii) } \widehat{\tau_a.f} = e_{-a}.\widehat{f},$$
   $$\text{(iii) } \widehat{\widehat{f}} = \overline{\theta_{-1}\widehat{f}}, \qquad \text{(iv) } \widehat{\theta_\lambda f} = \frac{1}{\lambda}\,\theta_{\frac{1}{\lambda}}\widehat{f}.$$

4) *(Transformée de Fourier des densités gaussiennes.)*
   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}$.
   a) Montrer que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\widehat{f}\,'(\xi) = \dfrac{-i}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-i\xi x - x^2/2}\,dx$.
   b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\widehat{f}\,'(\xi) = -\xi\widehat{f}(\xi)$.
   c) En déduire que $\widehat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$.
   d) Donner la transformée de Fourier de la fonction $g_{m,\sigma}$ définie par : $g_{m,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sigma}f\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$, où m est réel et σ réel strictement positif.
   e) En utilisant l'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, montrer sans calcul que $g_{m,\sigma} \star g_{m',\sigma'} = g_{m+m',\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}}$ pour tous $m, m' \in \mathbb{R}$ et $\sigma, \sigma' > 0$.

5) Pour tout $a > 0$ on pose $f_a(x) = x^{a-1}\,e^{-x}\,1\!\!1_{]0,+\infty[}(x)$.

a) Montrer que $f_a \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $a > 0$.

b) Montrer que $\varphi_a = \widehat{f_a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle :

$$\varphi_a'(\xi) = -\frac{ia}{1+i\xi}\varphi_a(\xi).$$

c) En déduire que

$$\widehat{f_a}(\xi) = \Gamma(a)\exp\Big(-a\big(\frac{1}{2}\ln(1+\xi^2) + i\arctan\xi\big)\Big).$$

d) Déduire de ce qui précède que Γ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et que pour tous $a, b > 0$ on a

$$\frac{f_a}{\Gamma(a)} \star \frac{f_b}{\Gamma(b)} = \frac{f_{a+b}}{\Gamma(a+b)}.$$

6) Cet exercice a pour but de démontrer que la transformation de Fourier n'est pas surjective en tant qu'application de $L^1(\mathbb{R})$ dans l'espace$C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 en $\pm\infty$i.

a) Montrer qu'en posant

$$\forall x \geqslant 0 \phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt\,,$$

on obtient une fonction de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue, bornée, tendant vers 0 en $+\infty$.

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction impaire. et $a > 0$. Montrer que

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi}\,d\xi = -2i\int_0^{+\infty} f(x)\phi(ax)\,dx\,.$$

c) On considère la fonction impaire g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(x) = \frac{x}{e} \quad\text{pour}\quad x < e \qquad\text{et}\qquad g(x) = \frac{1}{\ln x} \quad\text{pour}\quad x \geqslant e.$$

Montrer que $g \in C_0(\mathbb{R})$ mais n'est la transformée de Fourier d'aucun élément de $L^1(\mathbb{R})$.

7) D'après le cours, la transformation de Fourier est une bijection linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$, sous-espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que l'application réciproque

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \to L^1(\mathbb{R})$$

n'est pas continue si on muni $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ et $L^1(\mathbb{R})$ de leurs normes "naturelles", respectivement $|| \, ||_\infty$ et $|| \, ||_1$.

Pour $n \geqslant 1$, soit f_n la fonction indicatrice de l'intervalle $[-n, n]$.

a) Calculer $\widehat{f_n}$ et $f_n \star f_1$ pour $n \geqslant 1$.

b) Montrer que $f_n \star f_1 = \widehat{g_n}$ où g_n est la fonction :

$$g_n(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin x.\sin(nx)}{x^2}\,.$$

.

c) Montrer à l'aide d'un changement de variable et du lemme de Fatou que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||g_n||_1 = +\infty$.

d) En déduire qu'il n'existe pas de constante c telle que :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad ||f||_1 \leqslant c\,||\widehat{f}||_\infty.$$

Conclure.

8) a) Montrer que pour toute fonction f en escalier, $f \star K_\tau \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ quand $\tau \to 0$.

b) En déduire que le même résultat est vrai pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

c) On suppose que f vérifie

$$(*) \qquad \forall g \in L^1(\mathbb{R}) \qquad f \star g = g.$$

Étudier la convergence ponctuelle de K_τ et conclure à une contradiction ; cela signifie que l'opération de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.