Série n°4 : Convolution

Notations (utilisées ici et dans la suite) :

- *Si* $p \in [1, +\infty]$, p' *est l'exposant conjugué, appartenant également à* $[1, +\infty]$, *tel que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
- *On note* $C_b(\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues bornées sur* $\mathbb{R}$ *et on le munit de la norme* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, *pour lequel c'est un espace normé complet (voir le cours de Topologie). On note* $C_{ub}(\mathbb{R})$ *le sous-espace de* $C_b(\mathbb{R})$ *constitué des fonctions* uniformément *continues bornées.*

1) Soient f, g des fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que *la fonction f est convolable avec la fonction g* si

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\,dt < +\infty$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Si cette condition est vérifiée, on pose $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que, si f est convolable avec g, alors g est convolable avec f, et qu'alors $(f*g)(x) = (g*f)(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que f est convolable avec g dans chacun des cas suivants, et calculer $f * g$:

$$f = \mathbb{1}_{[-a,+a]}\,,\ g(x) = \sin x\,; \quad f = g = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}\,.$$

2) *Convolution d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et d'une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ ($1 < p < +\infty$).*

a) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$. La proposition 1.4.1 du cours énonce que f et g sont convolables et que $f * g$ appartient à $L^p(\mathbb{R})$. On se propose d'en faire la démonstration.
Écrire

$$|f(t)g(x-t)| = \Big(|f(t)|\,|g(x-t)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} |f(t)|^{\frac{1}{p'}}$$

et, en utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\,dt\Big)^p dx \leq \|f\|_1^p\,\|g\|_p^p.$$

Conclure que $f * g$ est définie p.p., et que

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p.$$

b) Soit $f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$. Choisir α et β de telle sorte que $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ et $f_\beta \in L^p(\mathbb{R})$. Estimer $f_\alpha * f_\beta(x)$, quand $x \to +\infty$. Confirmer ainsi le résultat de la question précédente.

c) Soit $h \in L^p(\mathbb{R})$ et soit U_h l'application de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ qui à tout f associe $f * h$. Montrer que U_h est une application linéaire continue telle que $\|U_h\| \leqslant \|h\|_p$. En testant U_h sur les fonctions K_τ, et en utilisant le théorème 1.4.2 du cours, montrer que $\|U_h\| = \|h\|_p$.

3) Soit $p \in [1, +\infty[$. Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad (T_x f)(y) = f(y-x) - f(y)\,.$$

a) Montrer que T_x est une application linéaire continue de $L^p(\mathbb{R})$ dans lui-même, de norme inférieure ou égale à 2.

b) Soit f la fonction indicatrice d'un intervalle compact. Calculer $\|T_x f\|_p$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

c) Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{x \to 0} T_x f = 0$, dans $L^p(\mathbb{R})$.

4) *Convolution d'une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ et d'une fonction de $L^{p'}(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.*
Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$.

a) Montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder que $(f * g)(x)$ est défini *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $f * g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$. *Indication : utiliser l'exercice précédent.*

c) Montrer que si $1 < p < +\infty$, on a $f * g \in C_0(\mathbb{R})$. À l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce n'est pas toujours le cas si $p = 1$ (et donc $p' = +\infty$).

d) En prenant pour f et g des fonctions de la forme $x \mapsto x^{-\alpha} \ln^{-\beta}(x) 1\!\!1_{[2,+\infty[}(x)$, pour des exposants α et β convenables, vérifier que $f * g$ peut très bien n'appartenir à aucun espace $L^r(\mathbb{R})$, avec $r < +\infty$.

5) a) Montrer que l'application de $C_b(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ qui à une fonction associe sa classe d'équivalence, est une isométrie linéaire, si les deux espaces sont munis de leurs normes "naturelles".

b) À l'aide de l'isométrie ci-dessus, montrer que $C_b(\mathbb{R})$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $C_{ub}(\mathbb{R})$ est un sous-espace fermé de $C_b(\mathbb{R})$.

d) Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{\tau \to 0} K_\tau * g = g \quad \text{dans} \quad L^\infty(\mathbb{R})$$

si et seulement si $g \in C_{ub}(\mathbb{R})$, modulo l'identification de la question b).

6) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R}$, bornée, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k. Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.

7) a) Montrer que l'identité

$$\widehat{f\,g} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}$$

est vraie dans les deux cas suivants :

$$f, g, \widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})\,; \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})\,.$$

(Préciser dans chacun des cas à quel titre les transformations de Fourier et le produit de convolution qui apparaissent dans cette relation ont un sens.)

b) Calculer $f_a * f_b$ pour $a, b > 0$, où $f_a(x) = \dfrac{\sin ax}{x}$.

8) On suppose que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f, f' et f'' sont des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Exprimer $\widehat{f''}$ en fonction de $\widehat{f}$. En déduire que $f \in X$ (où X est l'ensemble des fonctions intégrables, continues, bornées et de transformée de Fourier intégrable).

9) Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Peut-on appliquer à f la proposition 1.5.1 ?

b) Montrer cependant que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et que $(\widehat{f})'$ est p.p. égale à la transformée de Fourier (dans $L^2(\mathbb{R})$) de la fonction $x \mapsto -ixf(x)$. (On pourra utiliser l'exercice 2 de la série n°3).