Série n°5 : Espaces de Hilbert I

Rappels : 1) L'identité du parallélogramme (ou de la médiane)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

est satisfaite dans tout espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire, voir le cours : formule (3), page 30.
2) Une partie C d'un espace vectoriel est dite convexe si pour tous x, y éléments de C et tout $t \in]0,1[$, on a $(1-t)x + ty \in C$.

1) Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soit x, y deux vecteurs de H. Montrer que *l'égalité* de Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires (On traitera successivement les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.)

2) Comment retrouver le produit scalaire à partir de la norme ? Dans un espace vectoriel *réel*, muni d'un semi-produit scalaire, on utilise la formule (4), page 30. Montrer que, dans un espace vectoriel *complexe*, muni d'un semi-produit scalaire, on dispose de l'identité

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big).$$

3) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une semi-norme $\|-\|$, qui vérifie l'identité du parallélogramme. On définit l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big).$$

On se propose d'établir que l'application φ est un semi-produit scalaire sur E, en montrant les identités suivantes, où x, y, z sont des éléments de E et $\lambda \in \mathbb{C}$:
a) $\varphi(x, x) = \|x\|^2$.
b) $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.
c) $\varphi(x+y, z) = 2\varphi(x, z/2) + 2\varphi(y, z/2)$.
d) $\varphi(x, y) = 2\varphi(x, y/2)$.
e) $\varphi(x+y, z) = \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$.
f) $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$ (en commençant par $\lambda \in \mathbb{N}$ puis en étendant successivement à $\lambda \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$).

4) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et C une partie de E.
a) Montrer que si C est convexe, alors C possède la propriété suivante :
($\star$) Pour tout $x \in E \setminus C$, il existe *au plus un* élément y de C tel que

$$\|x-y\| = \min\{\|x-z\| \,:\, z \in C\}.$$

Indication : On supposera que deux éléments y_1 et y_2 de C ont cette propriété, et on calculera

$$\left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|^2$$

à l'aide de l'identité du parallélogramme.

b) Donner un exemple d'une partie fermée (non convexe !) de $\mathbb{R}^2$ n'ayant pas la propriété $(\star)$.

5) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note l_2^p l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, muni de la norme définie par

$$\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty\,, \quad \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)\ .$$

Montrer que la norme de l_2^p est issue d'un produit scalaire si et seulement si $p = 2$. *Indication :* on testera l'identité du parallélogramme sur les vecteurs de la base canonique.

6) Soit $p \in [1, +\infty]$. Montrer que la norme de $L^p([0, 1])$ est issue d'un produit scalaire si et seulement si $p = 2$. *Indication :* on testera l'identité du parallélogramme sur deux fonctions indicatrices.

7) L'espace $C([0, 1])$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni du produit scalaire induit par $L^2(\mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx$, est-il un espace de Hilbert ?

8) Soit E un $\mathbb{R}$-espace normé.

a) Montrer que la boule unité fermée $B = \{x \in E\ :\ \|x\| \leq 1\}$ est un sous-ensemble convexe fermé de E.

b) Soit $x \in E$ tel que $\|x\| > 1$. Montrer qu'il existe *au moins un* élément y de B tel que

$$\|x - y\| = \min\{\|x - z\|\ :\ z \in B\,\}\,.$$

En examinant les cas $E = l_2^1$ et $E = l_2^\infty$(voir l'exercice 5) montrer que y n'est pas nécessairement unique.

9) a) H étant un espace de Hilbert et $a \neq 0$ un élément de H, montrer que :

$$\forall x \in H \qquad d(x, \{a\}^\perp) = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}.$$

b) Soit F le sous-espace vectoriel de $H = L^2([0, 1])$ défini par

$$F = \{f \in H\ :\ \int_0^1 f(x)\, dx = 0\}.$$

Montrer que F est fermé et calculer la distance à F de l'élément de H défini par $f(x) = e^x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

10) Soit H un espace de Hilbert admettant une suite orthonormée infinie $(e_n)_{n\geqslant 1}$. On pose $F = \{e_n\ :\ \ n \geqslant 1\}$.

a) Soit $x \in H$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\langle x, e_n\rangle = 0$. En déduire la limite de $\|e_n - x\|$, quand $n \to \infty$.

b) Montrer que F est fermé et borné.

c) Calculer $\|e_n - e_m\|$ pour $n \neq m$. En déduire que F n'est pas compact.

d) Soit $G = \{\big(1 + \frac{1}{n}\big)e_n\ :\ \ n \geqslant 1\}$. Montrer que G est fermé, mais qu'il n'existe aucun élément y de G tel que

$$\|y\| = \min\{\|z\|\ :\ z \in G\,\}\,.$$