Série n°6 : Bases hilbertiennes

1) Soit H_1 et H_2 des espaces de Hilbert (la norme et le produit scalaire seront notés de la même façon dans H_1 et H_2).
   a) Soit $\Phi : H_1 \to H_2$ une application linéaire. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
      1. $\|\Phi(x)\| = \|x\|$, pour tout $x \in H_1$;
      2. $\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, pour tous $x, y \in H_1$.

      On dit alors que Φ est une *isométrie linéaire.*
   b) Soit $\Phi : H_1 \to H_2$ une isométrie linéaire. Montrer que :
      1. $\Phi(H_1)$ est un espace de Hilbert, s'il est muni du produit scalaire de H_2.
      2. Si $(e_j)_{j\in I}$ est une base hilbertienne de H_1, alors $(\Phi(e_j))_{j\in I}$ est une base hilbertienne de $\Phi(H_1)$.

2) On note $\Phi : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) \quad , \forall x \in \mathbb{R}\,, \forall f \in L^2(\mathbb{R})\,.$$

On définit l'ensemble V de la façon suivante : une fonction appartient à V si elle appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et si elle est constante sur chacun des intervalles $[k, k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note u_k la fonction indicatrice de $[k, k+1[$ et on pose

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_{2k} - u_{2k+1}\right)\,.$$

Établir les propriétés suivantes :
   a) Φ est une isométrie linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.
   b) V est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$.
   c) $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de V.
   d) $\Phi(V)$ est un sous-espace vectoriel fermé de V.
   e) $(\Phi(u_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\Phi(V)$.
   f) Si W désigne l'orthogonal de $\Phi(V)$ dans V, alors $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de W.

3) Soit H l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$ pour le produit scalaire usuel. On considère dans H la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
   a) Montrer qu'il existe dans H une et une seule suite *orthonormée* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n soit un polynôme de degré n vérifiant $w_n^{(n)}(0) > 0$. Calculer w_0, w_1, w_2.
   b) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.
   c) On considère la fonction $f = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$. Déterminer, dans H, la meilleure approximation de f par des polynômes de degré au plus deux.

4) *(Polynômes de Legendre)* L'espace de Hilbert $L^2([-1,1])$ (relatif à la mesure de Lebesgue) est noté H et $\langle -, -\rangle$ désigne son produit scalaire.
   a) Démontrer l'identité

$$\langle f^{(n)}, g\rangle = (-1)^n \langle f, g^{(n)}\rangle + \left[\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m f^{(m)}(x) g^{(n-m-1)}(x)\right]_{x=-1}^{x=1}$$

pour toutes fonctions f et g, de classe C^n sur $[-1,1]$, et tout entier $n \geqslant 1$. *Indication :* raisonner par récurrence sur n.

b) On considère les fonctions $\varphi_n(x) = (1-x^2)^n$ et $\psi_n = \varphi_n^{(n)}$, pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrer que $\varphi_n^{(j)}(\pm 1) = 0$ pour $0 \leqslant j < n$ et que ψ_n est un polynôme de degré n. En déduire que les fonctions ψ_n, $n \geqslant 0$, sont deux à deux orthogonales.

c) À l'aide du théorème de Weierstrass, montrer que les polynômes $P_n = \|\psi_n\|^{-1}\psi_n$, $n \in \mathbb{N}$, forment une base hilbertienne de H.

d) On pose $I_n = \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle$. Montrer que

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}\,, \quad \forall n \geqslant 1\,.$$

En déduire la valeur de I_n et celle de $\|\psi_n\|$, pour tout $n \geqslant 0$.

e) Calculer la meilleure approximation dans $L^2([-1,1])$ de la fonction $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ par une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Tracer son graphe.

5) *(Polynômes de Laguerre)* On note μ la mesure borélienne positive sur $[0,+\infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue, et H l'espace de Hilbert $L^2([0,+\infty[,\mu)$. On note $\langle -,- \rangle$ et $\| - \|$ le produit scalaire et la norme de H On définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n).$$

On désigne par E l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,+\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note u_k la fonction : $x \mapsto x^k$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note ψ_z la fonction $x \mapsto e^{-zx}$.

a) Montrer que, pour tout n, L_n est une fonction polynôme de degré n.

b) Montrer que E est inclus dans H. Montrer que $\psi_z \in H$ si et seulement si $\Re(z) > -1/2$, auquel cas on calculera $\|\psi_z\|$.

c) Par une succession d'intégrations par parties, montrer que :

$$\langle u_k, L_n \rangle = \begin{cases} (-1)^n n! & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k < n \end{cases}.$$

(On remarquera que, pour $0 \le p < n$, $\dfrac{d^p}{dx^p}(e^{-x}x^n)$ vaut 0 en $x = 0$.) En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de H.

d) Soit z tel que $\Re(z) > -1/2$. Montrer que

$$\langle \psi_z, L_n \rangle = \frac{z^n}{(z+1)^{n+1}}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

En déduire que

$$\|\psi_z\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle \psi_z, L_n \rangle|^2$$

et que $\psi_z \in \overline{E}$.

e) Soit f un élément de H. On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$, en posant $g(x) = f(x)e^{-x}$ pour $x \geqslant 0$ et $g(x) = 0$ pour $x < 0$.
- Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$.
- En supposant que f est orthogonale à E, montrer, à l'aide de la question précédente, que $\widehat{g} = 0$. Quelle conclusion en tirer pour f ?

f) Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.