Série n°7 : Espaces de Hilbert et séries de Fourier

1) On note $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la base trigonométrique de $L^2([0,2\pi])$, définie par

$$\forall x \in [0,2\pi] \quad e_n(x) = e^{inx}\,.$$

On pose $H_+ = \{f \in L^2([0,2\pi]) \,:\, \langle f, e_n\rangle = 0\,, \forall n < 0\}$.

a) Montrer que H_+ est sous-espace vectoriel fermé de $L^2([0,2\pi])$ et que $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de H_+.

On considère dans la suite un élément f de $L^2([0,2\pi])$ et on note g la projection orthogonale de f sur H_+.

b) Exprimer g à l'aide de la base trigonométrique.

c) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\langle f, e_n\rangle\, z^n$ converge pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$.

d) Pour tout $r \in [0,1[$ et tout $x \in [0,2\pi]$, on pose

$$f_r(x) = \sum_{n\geqslant 0}\langle f, e_n\rangle\, r^n e^{inx}\,.$$

Montrer que f_r est une fonction de classe C^∞ et que $\lim_{r\to 1} f_r = g$ dans $L^2([0,2\pi])$.

2) On rappelle que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i, données par :

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \qquad \text{et} \qquad f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

a) Montrer que si $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, les deux fonctions f_p et f_i sont aussi dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Montrer de plus que, pour $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: $f = g$ p.p. $\Longrightarrow f_p = g_p$ p.p. et $f_i = g_i$ p.p., si bien que la décomposition précédente induit une décomposition des éléments de $L^2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'ensemble F des éléments de $L^2(\mathbb{R})$ ayant un représentant pair (noter que cela équivaut à : $f(x) = f(-x)$ p.p. pour tout représentant) constitue un s.e.v. fermé de $L^2(\mathbb{R})$.

c) Déterminer le s.e.v. $F^\perp$ orthogonal de F dans $L^2(\mathbb{R})$.

d) Quelle est la meilleure approximation dans $L^2(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x-a)}{x-a}$ $(a \in \mathbb{R})$ par une fonction paire ? et de $\dfrac{e^{ix}-1}{x}$?

3) Soit P le projecteur orthogonal sur un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert H. Montrer que

$$\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle\,, \quad \forall x, y \in H\,.$$

4) Soit H un espace vectoriel et $P : H \to H$ une application linéaire telle que $P \circ P = P$. On note I l'application identique de H dans lui-même.

a) Montrer que l'image de P coïncide avec le noyau de $P - I$, que

$$H = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$$

et que P est le projecteur sur $\operatorname{Im} P$, parallèlement à $\operatorname{Ker} P$.

On suppose, dans la suite, que H est un espace de Hilbert.

b) On suppose que P est continue. Montrer que $\operatorname{Ker} P$ et $\operatorname{Im} P$ sont des s.e.v. fermés de H, et que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \operatorname{Ker} P \times \operatorname{Im} P & \to & H \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

est linéaire, bijective et bicontinue. (L'espace vectoriel $\operatorname{Ker} P \times \operatorname{Im} P$ sera muni du produit scalaire défini par

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle\ ).$$

c) On suppose que P satisfait la condition

$$\langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle\,, \quad \forall x, y \in H\,.$$

Montrer que P est continu, que $(\operatorname{Im} P)^{\perp} = \operatorname{Ker} P$, que P n'est autre que le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} P$, enfin que l'application Φ est une isométrie.

5) *On rappelle que l'identité $F = (F^{\perp})^{\perp}$ est vraie pour tout sous-espace vectoriel fermé F d'un espace de Hilbert H. On se propose de vérifier que la complétude de H est indispensable pour qu'il en soit ainsi.*

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base hilbertienne de $l^2(\mathbb{N})$. Soit E le sous-espace vectoriel de $l^2(\mathbb{N})$ constitué des suites de nombres complexes qui sont nulles à partir d'un certain rang. On munit E du produit scalaire de $l^2(\mathbb{N})$, c'est-à-dire

$$\langle (x_n)_{n \geqslant 0}, (y_n)_{n \geqslant 0} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}.$$

a) Est-ce-que E est un espace de Hilbert ?

b) Montrer que l'application de E dans $\mathbb{C}$, définie par

$$f : (x_n)_{n \geqslant 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1}\,,$$

est une forme linéaire continue sur E.

c) Soit $F = \ker f$. Montrer que F est un s.e.v. fermé de E, strictement contenu dans E.

d) On suppose que $x \in E$ est un vecteur non nul orthogonal à F. Montrer que $f(x) \neq 0$ et que $x - (n+1) f(x) e_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de $\langle e_n, x \rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Conclure que l'orthogonal de F dans E est réduit à $\{0\}$. Que dire alors du bi-orthogonal $(F^{\perp})^{\perp}$?

6) Soit $G \subset \mathbb{R}$. On dit que G est un *sous-groupe additif* de $\mathbb{R}$ si $0 \in G$ et si, pour tous x, y appartenant à G, on a $x - y \in G$. Pour tout réel a, on pose $\mathbb{Z}a = \{ka\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}a$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, quel que soit a. Donner un exemple de sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $\mathbb{Z}a$.

Dans la suite de l'exercice, G désigne un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, qu'on suppose différent de $\{0\}$.

b) Montrer que l'ensemble $G_+^* = G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.

c) On suppose que G_+^* admet un plus petit élément a. Montrer que $G = \mathbb{Z}a$. Montrer que a est l'unique réel positif b tel que $G = \mathbb{Z}b$.

d) On suppose que G_+^* n'admet pas de plus petit élément. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$ (i.e. que tout intervalle ouvert non vide contient un élément de G).

7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $T \in \mathbb{R}$. On dit que T est une *période* de f si on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des périodes d'une fonction est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, qu'on appellera son groupe de périodes.

b) Montrer que le groupe des périodes d'une fonction continue non constante est de la forme $\mathbb{Z}T$, pour un certain réel $T \geqslant 0$.

Une fonction f est dite périodique si son groupe de période n'est pas réduit à $\{0\}$. On dit que f est T-périodique si T est une période non nulle de f. D'après l'exercice précédent, une fonction continue périodique non constante, admet une plus petite période positive.