Série n°8 : Séries de Fourier I

Notations utilisées dorénavant. Pour $T > 0$, L^p_T désigne l'ensemble des classes de fonctions f, mesurables, T-périodiques sur $\mathbb{R}$, telles que $\int_I |f(x)|^p dx < +\infty$ pour tout intervalle borné I. L^p_T est un espace normé complet pour la norme

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

(le nombre réel a est quelconque, puisque l'intégrale d'une fonction T-périodique sur un intervalle de longueur T est indépendante du choix de cet intervalle). L^2_T est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\overline{g(x)}dx\,.$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique donnée par : $f(x) = \pi - x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.

En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, puis $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique donnée par : $f(x) = \operatorname{sign} x$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$. Retrouver ainsi la seconde des formules ci-dessus.

3) Soit $f \in L^2_{2\pi}$. Si p est un entier fixé ($p \geq 2$) on définit $g(x) = f(px)$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) Montrer que g appartient à $L^2_{2\pi}$ et que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_{kp}(g) = c_k(f), \quad \text{et} \quad c_n(g) = 0 \text{ pour } n \text{ non multiple de } p.$$

(On pourra remarquer que cette propriété est immédiate lorsque $f(x) = e^{inx}$.)

b) Interpréter le résultat précédent en observant qu'on a aussi $g \in L^2_{2\pi/p}$

c) Calculer, à l'aide de l'exercice précédent, les coefficients de Fourier de la fonction π-périodique donnée par : $f(x) = \operatorname{sign} x$ sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

4) Soit $f \in L^2_T$. On note $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de f. Montrer que

a) si f est paire : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = c_{-n}(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,$

b) si f est impaire : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = -c_{-n}(f) = \frac{-2i}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx.$

5) a) Montrer que les fonctions $\cos(nx), n \in \mathbb{N}$, et $\sin(nx), n \in \mathbb{N}^*$, convenablement normalisées, constituent une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

b) Montrer que toute fonction f de $L^2_{2\pi}$ peut s'écrire (égalité dans $L^2_{2\pi}$) :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big),$$

où $a_n = c_n(f) + c_{-n}(f)$ ($n \in \mathbb{N}$) et $b_n = i\,(c_n(f) - c_{-n}(f))$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

c) Quelle forme prend la représentation précédente si f est paire, impaire ?

d) Montrer que : $\|f\|_2^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$.

6) Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on considère la fonction f, 2π-périodique, telle que $f(x) = e^{\alpha x}$ pour $x \in [0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire l'identité :

$$\frac{1}{e^{2\pi\alpha} - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi\alpha} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}.$$

7) a) Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Montrer que si f vérifie la condition :

$$(C) \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty\,,$$

alors il existe une fonction continue g telle que $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

b) La fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \mathrm{sign}(x)$ sur $[-\pi, +\pi[$ vérifie-t-elle la condition (C) ? Même question pour les fonctions :

(i) $g(x) = x$ sur $[0, 2\pi[$, (ii) $h(x) = x^2$ sur $[-\pi, +\pi]$,

(iii) $j(x) = |x|$ sur $[-\pi, +\pi]$, (iv) $k(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$ sur $\mathbb{R}$.

c) Pour lesquelles de ces fonctions pouvez-vous affirmer qu'elles sont égales en tout $x \in \mathbb{R}$ à la somme de leur série de Fourier ?

8) Soit $f \in L^1_{2\pi}$ telle que $c_0(f) = 0$. Soit F une primitive généralisée de f sur $\mathbb{R}$. On rappelle que F est une fonction continue.

a) Montrer que F est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $c_n(f) = in\, c_n(F)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

c) On suppose de plus que $\int_0^{2\pi} F(x)\,dx = 0$ et que $f \in L^2_{2\pi}$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |F(x)|^2\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$$

avec égalité si et seulement si la fonction F est de la forme $F(x) = ae^{ix} + be^{-ix}$.

9) Soit f la fonction 2π-périodique donnée par : $f(x) = x(2\pi - x)$ sur $[0, 2\pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f'. En déduire ceux de f, puis la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

10) On s'intéresse aux fonctions f, 2π-périodiques, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, qui sont solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = g(x),$$

où $g(x) = |\sin(\frac{x}{2})|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) En calculant ses coefficients de Fourier, montrer l'unicité d'une telle solution.

b) Montrer inversement qu'une telle solution existe.

c) Déterminer toutes les solutions de (E), y compris celles qui ne sont pas périodiques.