Série n°9 : Séries de Fourier II

1) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on considère la fonction 2π-périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, +\pi[\quad : \quad f(x) = \cos(zx)\,.$$

a) Calculer les coefficients de Fourier de f ; montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que f est, en tout point de $\mathbb{R}$, la somme de sa série de Fourier.

b) En déduire le *développement eulérien* suivant :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad : \quad \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)\,.$$

c) Montrer que la série ci-dessus — ainsi que ses séries dérivées de tous ordres — converge normalement sur tout compact K de $\mathbb{C}$ tel que $K \cap \mathbb{Z} = \emptyset$; en déduire la formule :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad : \quad \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}\,.$$

2) Appliquer le théorème de Dirichlet-Dini aux fonctions suivantes (là où c'est licite) :

$$f(x) = \text{sign }(x) \text{ sur } [-\pi, +\pi[, \quad g(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ sur } [0, 2\pi[, \quad h(x) = e^{\alpha x} \text{ sur } [0, 2\pi[\quad (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

(Retrouver en particulier l'identité obtenue dans l'exercice 6 de la série 8.)

3) Soit f une fonction 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0+) \neq f(x_0-)$. Soit $\alpha > 0$, assez petit pour que f soit de classe C^1 sur l'intervalle $I =]x_0, x_0 + \alpha]$.

a) Montrer que la suite de fonctions $(S_n f)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers f sur I.

b) Montrer que la suite de fonctions $(S_n f)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur I. *Indication :* si la convergence était uniforme sur I, on aurait

$$\lim_{n \to +\infty} S_n f(x_0) = f(x_0+)\,.$$

4) On reprend la fonction g de l'exercice 2.

a) $\alpha > 0$ étant fixé, on pose $x_n = \dfrac{\alpha}{n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n g\,(x_n) = \int_0^\alpha \frac{\sin u}{u}\, du.$$

b) Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du < 0$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\, du > \frac{\pi}{2}$.

c) Déduire de a) et b) que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n g\,(\frac{\pi}{n}) > \|g\|_\infty.$$

On notera que ce résultat confirme celui de l'exercice précédent.

Remarque : Le même phénomène, dit *phénomène de Gibbs*, peut être mis en évidence sur la fonction $f(x) = \text{sign }(x)$ sur $[-\pi, +\pi[$, en considérant la suite des valeurs $S_{2n+1}f(\frac{\pi}{2n})$. (Admettre ou démontrer que $\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\, du > 1,8$.)

5) Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in L^2_{2\pi}$ dont les coefficients de Fourier sont donnés par $c_0(f) = 0$ et $c_n(f) = \dfrac{1}{|n|^{3/4}}$ pour $n \neq 0$. Montrer à l'aide du théorème de Fejér qu'il n'existe pas de fonction continue g sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour presque tout x. (On pourra remarquer que $\sigma_n f(0)$ tend vers l'infini.)

6) **Quelques utilisations de la fonction de Bessel.** On rappelle que la fonction de Bessel J_0 est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad J_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ix\sin t}\, \frac{dt}{2\pi}\,.$$

a) Établir les formules suivantes :

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ix\cos t}\, \frac{dt}{2\pi}\,.$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour} \quad x \in]-1,1[\,, \quad f(x) = 0 \quad \text{ailleurs}\,.$$

Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\widehat{f} = J_0$.

c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \arcsin x \quad \text{pour} \quad x \in]-1,1[\,, \quad g(x) = 0 \quad \text{ailleurs}\,.$$

Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et exprimer $\widehat{g}$ à l'aide de la fonction J_0.

La transformation de Fourier se définit sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ par la formule suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi . x} dx$$

où $\xi.x$ désigne le produit scalaire canonique entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Elle possède les mêmes propriétés que la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$: on peut montrer par exemple que $\widehat{f}$ est une fonction continue, tendant vers 0 à l'infini, et établir une formule d'inversion de Fourier.

d) Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne $g_n(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$, où $|x|$ est la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$.

Une fonction radiale *est une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ qui ne dépend que de $|x|$, autrement dit : telle qu'il existe une fonction u définie sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = u(|x|)\,. \tag{1}$$

e) Soit f une fonction radiale intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que, pour toute rotation R de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \widehat{f}(R(\xi)) = \widehat{f}(\xi)\,.$$

En déduire que $\widehat{f}$ est elle-même une fonction radiale.

f) Soit f une fonction radiale intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ telle qu'on ait (1). En utilisant la formule d'intégration en coordonnées polaires (cf. le texte du partiel), montrer que

$$\forall \rho \geqslant 0\,, \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \widehat{f}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 2\pi \int_0^\infty u(r)\, J_0(\rho r)\, r\, dr\,.$$