Analyse hilbertienne et de Fourier, examen du 14 mai 2008

Les documents sont interdits *durée 3h*

— *Partie I* —

a. On désigne par f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est définie sur $[-\pi,\pi[$ par

$$\forall x \in [-\pi,\pi[, \quad f(x) = x^2.$$

Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Calculer les coefficients de Fourier réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de la fonction f.

b. Montrer que pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, on a

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = x^2.$$

Expliciter ce résultat dans le cas $x = \pi$.

On désigne par H l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$. Pour chaque entier $n \geq 1$ on définit une fonction $u_n \in \mathrm{H}$ en posant pour tout $x \in [-\pi,\pi]$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).$$

c. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge dans l'espace H. On pose $g = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$; calculer la norme de g dans H. Montrer que pour tous a, b tels que $-\pi < a < b < \pi$, on a

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\,\langle g, \mathbf{1}_{[a,b]}\rangle_{\mathrm{H}} = (a^2 - b^2)/4.$$

d. Montrer que la fonction $x \in [-\pi,\pi] \to g(x) + x/2$ est un vecteur de H orthogonal à toutes les fonctions en escalier. Que peut-on en déduire ?

— *Partie II* —

On utilisera les notations et les résultats de la partie I, en particulier ce qui concerne la fonction f de la question I.**a**. On désignera par φ une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$.

a. Pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$ on désigne par $\tau_n\varphi$ la fonction translatée de φ qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $(\tau_n\varphi)(x) = \varphi(x-n)$. Calculer la transformée de Fourier de $\tau_n\varphi$ à partir de celle de φ.

b. On pose pour tout x réel

$$\mathrm{S}(x) = \frac{\pi^2}{3}\varphi(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \big(\varphi(x-n) + \varphi(x+n)\big).$$

Montrer que la fonction S est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathrm{S}}(y) = f(y)\,\widehat{\varphi}(y).$$

On suppose à partir de maintenant que la transformée de Fourier de la fonction φ est nulle en dehors de $[-\pi,\pi]$.

c. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\pi\,\varphi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y.$$

En déduire que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puis que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de φ'' à l'aide de $\widehat{\varphi}$.

d. Montrer que $\varphi''(x) = -\mathrm{S}(x)$ pour tout x réel. En déduire que $\|\varphi''\|_1 \leq \pi^2\,\|\varphi\|_1$.

Rappels.

Si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions f réelles ou complexes $\mathcal{A}$-mesurables sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$; la norme de cet espace est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega)\Big)^{1/p},$$

et $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet pour cette norme. On note simplement $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathrm{d}x)$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est définie sur l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en associant à toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(y) = \int_\mathbb{R} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x.$$

Quand $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{f}$ est continue, et elle est bornée par $\|f\|_1$. Quand f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f et $\widehat{f}$ sont intégrables, on a la formule *d'inversion de Fourier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\mathbb{R} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y.$$

Si f et $x \to x f(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est dérivable, et sa dérivée est la transformée de Fourier de $x \to -\mathrm{i}x f(x)$. Lorsque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que f et f' sont intégrables, la dérivée f' admet pour transformée de Fourier la fonction

$$y \in \mathbb{R} \to \mathrm{i}y\widehat{f}(y).$$

Séries de vecteurs, espaces de Hilbert

Dans un espace normé E, le vecteur $s \in \mathrm{E}$ est la somme de la série de vecteurs $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ si $\|s - \sum_{k=0}^n x_k\|_\mathrm{E}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Si l'espace E est complet, la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ converge dans E dès que $\sum \|x_n\|_\mathrm{E} < +\infty$, et dans ce cas le vecteur $s \in \mathrm{E}$ somme de la série vérifie

$$\|s\|_\mathrm{E} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|_\mathrm{E}\,; \quad \text{on note} \quad s = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

Une série de vecteurs deux à deux orthogonaux $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ d'un espace de Hilbert H converge dans H si et seulement si $\sum \|x_n\|^2 < +\infty$, et dans ce cas le vecteur $s \in \mathrm{H}$ somme de la série vérifie

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

L'espace $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([-\pi, \pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in \mathrm{H}, \quad \langle f, g\rangle_\mathrm{H} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}.$$

Le sous-espace vectoriel formé des fonctions en escalier est dense dans H.

Séries de Fourier

Si f est une fonction intégrable sur $[-\pi, \pi]$ on définit ses *coefficients de Fourier réels* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ en posant

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,; \quad \forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Les fonctions $\mathbf{1}$, et $x \to \sqrt{2}\cos(nx)$, $x \to \sqrt{2}\sin(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([-\pi, \pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$. Les sommes de Fourier de la fonction f sont données pour tout entier $n \geq 0$ par

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big).$$