Analyse hilbertienne et de Fourier, corrigé de l'examen du 14 mai 2008

— *Partie I* —

a. *On désigne par f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est définie sur $[-\pi, \pi[$ par*

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = x^2.$$

Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Calculer les coefficients de Fourier réels $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ de la fonction f.

Preuve. — Il est clair que f est continue en tout point x_0 tel que $-\pi < x_0 < \pi$, puisque $f(x) = x^2$ au voisinage de x_0. Au point $-\pi$, on voit que f est continue à droite,

$$f(-\pi) = \pi^2 = \lim_{\substack{x \to -\pi \\ x > -\pi}} x^2 = \lim_{\substack{x \to -\pi \\ x > -\pi}} f(x).$$

La définition proposée sur l'intervalle semi-ouvert $[-\pi, \pi[$ implique par 2π-périodicité que $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2$, qui est aussi la limite à gauche des valeurs de $f(x)$ quand x tend vers π, $x < \pi$. Donc f est continue à gauche au point π. Par périodicité on voit que f est continue à gauche au point $-\pi$, donc elle est continue au point $-\pi$ (et aussi $+\pi$). Il en résulte que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est paire, donc $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\pi\, a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)\, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, \mathrm{d}t \\
&= 2\Bigl(\Bigl[t^2 \frac{\sin(nt)}{n}\Bigr]_{t=0}^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} t\, \frac{\sin(nt)}{n}\, \mathrm{d}t\Bigr) = -4 \int_0^{\pi} t\, \frac{\sin(nt)}{n}\, \mathrm{d}t \\
&= 4\Bigl(\Bigl[t \frac{\cos(nt)}{n^2}\Bigr]_{t=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n^2}\, \mathrm{d}t\Bigr) = 4\pi \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = 4\pi \frac{(-1)^n}{n^2},
\end{aligned}$$

par conséquent on a pour tout $n \geq 1$

$$a_n = 4\, \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

De plus

$$\pi\, a_0 = 2 \int_0^{\pi} t^2\, \mathrm{d}t = \frac{2}{3} \pi^3, \quad \text{et} \quad a_0 = 2\, \frac{\pi^2}{3}.$$

b. *Montrer que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a*

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = x^2.$$

Expliciter ce résultat dans le cas $x = \pi$.

Preuve. — La fonction f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, ses coefficients de Fourier sont absolument sommables et la série de Fourier de f converge en tout point x vers la valeur $f(x)$,

$$f(x) = \lim_n (\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\bigr)$$

ce qui donne

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Pour finir, on a $f(x) = x^2$ quand $|x| \leq \pi$, d'où le résultat demandé.

Pour $x = \pi$,

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On désigne par H *l'espace de Hilbert* $\mathrm{L}^2([-\pi,\pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$. *Pour chaque entier* $n \geq 1$ *on définit une fonction* $u_n \in \mathrm{H}$ *en posant pour tout* $x \in [-\pi,\pi]$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).$$

c. *Montrer que la série* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge dans l'espace* H. *On pose* $g = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *; calculer la norme de* g *dans* H. *Montrer que pour tous* a, b *tels que* $-\pi < a < b < \pi$, *on a*

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\,\langle g, \mathbf{1}_{[a,b]}\rangle_{\mathrm{H}} = (a^2 - b^2)/4.$$

Preuve. — Comme les fonctions u_n sont deux à deux orthogonales, on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge dans l'espace de Hilbert H si et seulement si $\sum \|u_n\|_{\mathrm{H}}^2 < +\infty$; or

$$\|u_n\|_{\mathrm{H}}^2 = \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)\, \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} = \frac{1}{2n^2}$$

est bien le terme général d'une série convergente. De plus, on sait que

$$\|g\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|u_n\|_{\mathrm{H}}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \|g\|_{\mathrm{H}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Comme la série de vecteurs converge dans H et que le produit scalaire avec $\mathbf{1}_{[a,b]}$ est une forme linéaire continue sur H, on a

$$\langle g, \mathbf{1}_{[a,b]}\rangle_{\mathrm{H}} = \langle \sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \mathbf{1}_{[a,b]}\rangle_{\mathrm{H}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle u_n, \mathbf{1}_{[a,b]}\rangle_{\mathrm{H}},$$

donc

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\,\langle g, \mathbf{1}_{[a,b]}\rangle_{\mathrm{H}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_a^b \sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \big(\cos(na) - \cos(nb)\big) = \Big(\frac{a^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\Big) - \Big(\frac{b^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}\Big) = (a^2 - b^2)/4.$$

d. *Montrer que la fonction* $x \in [-\pi,\pi] \to g(x) + x/2$ *est un vecteur de* H *orthogonal à toutes les fonctions en escalier. Que peut-on en déduire ?*

Preuve. — Si on pose $h(x) = -x/2$ on a aussi

$$2\pi\,\langle h, \mathbf{1}_{[a,b]}\rangle_{\mathrm{H}} = \int_a^b (-t/2)\,\mathrm{d}t = (a^2 - b^2)/4.$$

Ainsi $g - h$ est orthogonale à $\mathbf{1}_{[a,b]}$. Comme toute fonction en escalier sur $]-\pi,\pi[$ est combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles, on déduit que $g - h$ est orthogonale à toutes les fonctions en escalier. Comme le sous-espace des fonctions en escalier est dense dans H, il en résulte que $g = h$ comme élément de l'espace H, c'est-à-dire presque partout.

Mais si $g = h$ dans H, la série de Fourier de g est la même que celle de $h(x) = -x/2$, et on déduit de Dirichlet que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = -x/2$ pour tout x tel que $|x| < \pi$.

— *Partie II* —

On utilisera les notations et les résultats de la partie I, en particulier ce qui concerne la fonction f de la question **I.a**. *On désignera par φ une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$.*

a. *Pour chaque entier $n \in \mathbb{Z}$ on désigne par $\tau_n\varphi$ la fonction translatée de φ qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $(\tau_n\varphi)(x) = \varphi(x-n)$. Calculer la transformée de Fourier de $\tau_n\varphi$ à partir de celle de φ.*

Preuve. — On a pour tout y réel

$$\widehat{(\tau_n\varphi)}(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u+n)y}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\widehat{\varphi}(y).$$

b. *On pose pour tout x réel*

$$\mathrm{S}(x) = \frac{\pi^2}{3}\varphi(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\big(\varphi(x-n)+\varphi(x+n)\big).$$

Montrer que la fonction S *est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathrm{S}}(y) = f(y)\widehat{\varphi}(y).$$

Preuve. — Posons pour tout $n \geq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v_n(x) = 2\,\frac{(-1)^n}{n^2}\big(\varphi(x-n)+\varphi(x+n)\big)$$

et

$$v_0(x) = \frac{\pi^2}{3}\varphi(x).$$

Par hypothèse il existe un nombre M tel que $|\varphi(x)| \leq \mathrm{M}$ pour tout x. On a donc pour tout $n \geq 1$

$$|v_n(x)| \leq \frac{4\mathrm{M}}{n^2}\ ;$$

la série de fonctions continues $\sum v_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc sa somme S est continue bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $n \geq 1$

$$(**) \qquad \|v_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |v_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{n^2}\int_{\mathbb{R}} \big(|\varphi(x-n)|+|\varphi(x+n)|\big)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2}\|\varphi\|_1$$

est le terme général d'une série convergente ; comme

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_n |v_n(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}|\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_n |v_n(x)|\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_n \int_{\mathbb{R}} |v_n(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

on sait (poly, théorème A.2) qu'on peut intervertir série et intégrale et

$$\widehat{\mathrm{S}}(y) = \int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} v_n(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^2}{3}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{(-1)^n}{n^2}\big(\varphi(x-n)+\varphi(x+n)\big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi^2}{3}\widehat{\varphi}(y) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\widehat{\varphi}(y)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}\,\widehat{\varphi}(y)\big)$$

$$= \Big(\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(ny)\Big)\widehat{\varphi}(y) = f(y)\widehat{\varphi}(y),$$

d'après l'égalité $(*)$.

On suppose à partir de maintenant que la transformée de Fourier de la fonction φ est nulle en dehors de $[-\pi, \pi]$.

c. *Montrer que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\pi \varphi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \, \mathrm{d}y.$$

En déduire que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puis que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de φ'' à l'aide de $\widehat{\varphi}$.

Preuve. — La fonction $\widehat{\varphi}$ est continue bornée et nulle en dehors de $[-\pi, \pi]$, donc $\widehat{\varphi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus φ est continue et intégrable : on a les hypothèses pour pouvoir appliquer l'inversion de Fourier, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\pi \, \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \, \mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \, \mathrm{d}y.$$

On obtient par dérivation sous le signe somme

$$2\pi \, \varphi'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(y) \mathrm{i} y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \, \mathrm{d}y\,;$$

ceci est justifié par le fait que si on pose

$$h(x, y) = \widehat{\varphi}(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy},$$

la dérivée de h par rapport au paramètre x, égale à $\mathrm{i} y \widehat{\varphi}(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy}$, admet une majoration par une fonction intégrable indépendante du paramètre x,

$$\left| \mathrm{i} y \widehat{\varphi}(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \right| \le |y| \, |\widehat{\varphi}(y)| \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |y| \, |\widehat{\varphi}(y)| \, \mathrm{d}y \le (2\pi) \pi \mathrm{M} < +\infty.$$

Ensuite, pour des raisons analogues, on a

$$2\pi \, \varphi''(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(y) (\mathrm{i} y)^2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \, \mathrm{d}y = -\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(y) f(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \, \mathrm{d}y,$$

où on a utilisé le fait que $f(y) = y^2$ sur l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$.

d. *Montrer que $\varphi''(x) = -\mathrm{S}(x)$ pour tout x réel. En déduire que $\|\varphi''\|_1 \le \pi^2 \, \|\varphi\|_1$.*

Preuve. — La fonction S vérifie aussi la formule d'inversion, puisque S est continue intégrable, et que $|\widehat{\mathrm{S}}| \le \pi^2 \, |\widehat{\varphi}|$ est intégrable ; on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$2\pi \, \mathrm{S}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathrm{S}}(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \, \mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\varphi}(y) f(y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} xy} \, \mathrm{d}y = -2\pi \, \varphi''(x).$$

La fonction S est la somme de la série $\sum v_n$ dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a donc

$$\|\mathrm{S}\|_1 \le \sum_{n=1}^{+\infty} \|v_n\|_1.$$

Il en résulte, par l'inégalité $(**)$, que

$$\|\varphi''\|_1 = \|\mathrm{S}\|_1 \le \frac{\pi^2}{3} \|\varphi\|_1 + \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \Big) \|\varphi\|_1 = \pi^2 \, \|\varphi\|_1.$$