Analyse hilbertienne et de Fourier, examen partiel du 14 mars 2008

Les documents sont interdits *durée 3h*

Pour résoudre les exercices qui suivent, vous devrez utiliser des théorèmes du cours concernant notamment l'inversion de Fourier, *la* dérivation des intégrales par rapport à un paramètre, *etc. Il vous est recommandé de rappeler les énoncés de ces théorèmes et, bien entendu, de vous assurer que leurs hypothèses sont vérifiées.*

— *Exercice I* —

a. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.

b. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4+x^2} \cos(yx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-2|y|}\,.$$

On définit une fonction g impaire sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $g(x) = -g(-x)$ pour tout x) en posant pour tout $x > 0$

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4+t^2}\,.$$

c. Vérifier que g est bornée sur $\mathbb{R}$, puis majorer $\bigl|g(x) - \int_x^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t\bigr|$ quand $x \ge 1$; en déduire que $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, mais que $g \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

d. À l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence de l'intégrale généralisée

$$\varphi(y) = \int_0^{+\infty} g(x)\sin(yx)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $y \ne 0$ et prouver que la fonction φ, ainsi définie, est continue sur $\mathbb{R}^*$.

e. À l'aide des questions précédentes, calculer la transformée de Fourier de g.

— *Exercice II* —

On définit une mesure μ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$ en posant $\mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; on rappelle la formule d'intégration en coordonnées polaires : si φ est une fonction réelle ≥ 0 et continue sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\Bigl(\int_0^{2\pi} \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\Bigr)\,\mathrm{e}^{-r}\,r\,\mathrm{d}r.$$

On désignera par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \mu)$ muni du produit scalaire habituel $\langle f, g\rangle_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^2} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$. Pour tout entier $n \ge 0$, on définit la fonction complexe f_n sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_n(x,y) = (x + \mathrm{i}y)^n.$$

a. Vérifier que $f_n(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$; montrer que f_n appartient à l'espace H, et calculer $\langle f_n, f_n\rangle_{\mathrm{H}}$ (on rappelle que $\int_0^{+\infty} r^k\,\mathrm{e}^{-r}\,\mathrm{d}r = k!$ pour tout entier $k \ge 0$). Montrer que $\langle f_m, f_n\rangle_{\mathrm{H}} = 0$ quand $m \ne n$.

Dans la suite, on suppose que les coefficients scalaires $(c_n)_{n\ge 0}$ sont tels que la série de vecteurs $\sum_{n\ge 0} c_n f_n$ converge dans l'espace de Hilbert H.

b. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum_{n\ge 0} c_n z^n$ converge.

On désignera par g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $g(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x+\mathrm{i}y)^n$, et par $h = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n f_n$ le vecteur de $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \mu)$ qui est la somme de la série de vecteurs.

c. Montrer que $h(x,y) = g(x,y)$ pour presque tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d. Vérifier que pour tout nombre réel $t > 0$, il existe une fonction k_t continue sur $\mathbb{R}^2$ et de la forme $k_t(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(t)\,(x+\mathrm{i}y)^n$, telle que pour tout $x > 0$ on ait

$$k_t(x,0) = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{tx})}{\sqrt{tx}}.$$

Montrer que $k_t \in \mathrm{H}$ et $\langle h, k_t\rangle_{\mathrm{H}} = 2\pi\,g(t,0)$.

Rappels.

Si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions f réelles ou complexes $\mathcal{A}$-mesurables sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$; la norme de cet espace est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p = \Bigl(\int_\Omega |f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) \Bigr)^{1/p},$$

et $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet pour cette norme. Si une suite de fonctions $(f_n) \subset \mathrm{L}^p$ converge dans L^p vers une fonction f, il existe des sous-suites (f_{n_k}) qui convergent presque-partout vers f.

Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est définie sur l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en associant à toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(y) = \int_\mathbb{R} f(x) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x.$$

Quand $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{f}$ est continue, et elle est bornée par $\|f\|_1$. Quand f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f et $\widehat{f}$ sont intégrables, on a la formule *d'inversion de Fourier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\mathbb{R} \widehat{f}(y) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}y.$$

Si f et $x \to x\,f(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est dérivable, et sa dérivée est la transformée de Fourier de $x \to -\mathrm{i}x\,f(x)$. Lorsque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que f et f' sont intégrables, la dérivée f' admet pour transformée de Fourier la fonction

$$y \in \mathbb{R} \to \mathrm{i}y\,\widehat{f}(y).$$

Lorsque $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est la limite dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ de la suite $(\widehat{g_n})$ des transformées de Fourier des fonctions intégrables $g_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}\, g$. Si g est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}g = \widehat{g}$ presque partout. La relation de Parseval affirme que

$$\forall g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}g\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|g\|_2.$$

Lorsque la limite

$$\psi(y) = \lim_{n \to +\infty} \int_{-n}^{n} g(x) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x$$

existe pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $(\mathcal{F}g)(y) = \psi(y)$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

Espaces de Hilbert

L'espace $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \langle f, g \rangle = \int_\Omega f(\omega)\, \overline{g(\omega)} \,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Dans un espace normé E, le vecteur $s \in \mathrm{E}$ est la somme de la série de vecteurs $\sum_{n \geq 0} x_n$ si $\|s - \sum_{k=0}^{n} x_k\|_\mathrm{E}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Une série de vecteurs deux à deux orthogonaux $\sum_{n \geq 0} x_n$ d'un espace de Hilbert H converge dans H si et seulement si $\sum \|x_n\|^2 < +\infty$, et dans ce cas le vecteur $s \in \mathrm{H}$ somme de la série vérifie

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2.$$

Divers

La fonction *sinus hyperbolique* est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sh} x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$.