Analyse hilbertienne et de Fourier, corrigé de l'examen partiel du 14 mars 2008

— *Exercice I* —

a. *Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.*

Preuve. — La fonction f est continue, donc elle est mesurable ; de plus elle est ≥ 0, donc son intégrale (de Lebesgue) a un sens : elle est finie ≥ 0 ou égale à $+\infty$. Par convergence monotone,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et comme f est paire

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \lim_n \int_0^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = 2 \lim_n \Bigl(\frac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{2}\Bigr) = 1 < +\infty,$$

donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ensuite,

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2|x|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2u+\mathrm{i}uy}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2-\mathrm{i}y)u}\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2+\mathrm{i}y)x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2-\mathrm{i}y} + \frac{1}{2+\mathrm{i}y} = \frac{4}{4+y^2}.$$

On a utilisé le fait suivant, pour $\lambda = 2 - \mathrm{i}y$ et $\lambda = 2 + \mathrm{i}y$: si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}\lambda > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_0^n \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_n \Bigl[\frac{-\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigr]_{x=0}^{n} = \lim_n \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda n}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

b. *Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4+x^2}\,\cos(yx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-2|y|}\,.$$

Preuve. — La fonction $\widehat{f}(y) = 4/(4+y^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$: en effet, elle est paire, positive, et

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{4}{4+y^2}\,\mathrm{d}y \leq \int_0^1 \mathrm{d}y + \int_1^{+\infty} \frac{4}{y^2}\,\mathrm{d}y = 5 < +\infty$$

(on pourrait calculer exactement l'intégrale avec une arctan, mais la valeur tombera à la fin de cette question). Comme f est continue, que f et $\widehat{f}$ sont intégrables, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier ; pour tout u réel,

$$f(u) = \mathrm{e}^{-2|u|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uv}\,\mathrm{d}v = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4+v^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uv}\,\mathrm{d}v.$$

Comme $\widehat{f}$ est paire, on obtient

$$\mathrm{e}^{-2|u|} = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4+v^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}uv}\,\mathrm{d}v = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4+v^2} \cos(uv)\,\mathrm{d}v.$$

En changeant le nom des lettres (y pour u et x pour v), on voit que

$$\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-2|y|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4+x^2} \cos(yx)\,\mathrm{d}x,$$

et on a bien établi l'égalité demandée. On notera que pour $y = 0$, on obtient

$$\frac{\pi}{2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{donc} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

On définit une fonction g impaire sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $g(x) = -g(-x)$ pour tout x) en posant pour tout $x > 0$

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4+t^2} \cdot$$

c. *Vérifier que g est bornée sur $\mathbb{R}$, puis majorer $\bigl|g(x) - \int_x^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t\bigr|$ quand $x \geq 1$; en déduire que $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, mais que $g \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.*

Preuve. — Pour $x > 0$ on a

$$0 < g(x) < \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

donc g est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\pi/4$, puisqu'elle est impaire. Ensuite, toujours pour $x > 0$,

$$\Bigl|g(x) - \int_x^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t\Bigr| = \Bigl|\int_x^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{4+t^2} - \frac{1}{t^2}\Bigr)\,\mathrm{d}t\Bigr| = \int_x^{+\infty} \frac{4}{t^2(4+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient, puisque $4 + t^2 \geq t^2$,

$$\bigl|g(x) - 1/x\bigr| = \Bigl|g(x) - \int_x^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t\Bigr| \leq \int_x^{+\infty} \frac{4}{t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3x^3} \cdot$$

On a donc pour $x > 0$

$$\bigl|x\,g(x) - 1\bigr| \leq \frac{4}{3x^2},$$

et il en résulte que $x\,g(x)$ tend vers 1 à l'infini. Puisque $g(x)$ est équivalent à $1/x$ en $+\infty$, les intégrales de $g(x)^p$ et de x^{-p} sont de même nature en $+\infty$: ainsi,

$$\int_1^{+\infty} g(x)^2\,\mathrm{d}x < +\infty, \qquad \int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty\,;$$

l'intégrale de $g(x)^p$ sur $[0,1]$ ne pose pas de problème puisque g est bornée. En résumé, la fonction g est de carré intégrable, mais elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

d. *À l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence de l'intégrale généralisée*

$$\varphi(y) = \int_0^{+\infty} g(x)\sin(yx)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $y \neq 0$ et prouver que la fonction φ, ainsi définie, est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Preuve. — On suppose $y \neq 0$; on intègre $x \to \sin(xy)$ en $x \to (1-\cos(xy))/y$, pour obtenir

$$\int_0^n g(x)\sin(yx)\,\mathrm{d}x = \Bigl[g(x)\,\frac{1-\cos(xy)}{y}\Bigr]_{x=0}^n - \int_0^n g'(x)\frac{1-\cos(xy)}{y}\,\mathrm{d}x.$$

On a $g'(x) = -1/(4+x^2)$, donc

$$\int_0^n g(x)\sin(yx)\,\mathrm{d}x = g(n)\,\frac{1-\cos(ny)}{y} + \int_0^n \frac{1}{4+x^2}\,\frac{1-\cos(xy)}{y}\,\mathrm{d}x.$$

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,\frac{1-\cos(xy)}{y}\,\mathrm{d}x$$

est absolument convergente, et g tend vers 0 à l'infini (on a vu que $g(x) \sim 1/x$ en $+\infty$) ; on obtient donc

$$\varphi(y) = \lim_n \int_0^n g(x)\sin(yx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xy)}{(4+x^2)y}\,\mathrm{d}x.$$

Pour montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^*$, il suffit de montrer la continuité de

$$y \to \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xy)}{4+x^2}\,\mathrm{d}x\,;$$

la quantité sous l'intégrale dépend continûment du paramètre y, et sa valeur absolue est majorée par la fonction intégrable $x \to 2/(4+x^2)$; la continuité en y en résulte par le théorème de convergence dominée. En fait, on connaît par **b** la valeur de l'intégrale, et on pourrait se contenter d'observer que cette valeur est continue en y !

e. *À l'aide des questions précédentes, calculer la transformée de Fourier de g.*

Preuve. — Comme g est impaire,

$$\int_{-n}^{n} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\int_{-n}^{n} g(x)\sin(xy)\,\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{i}\int_{0}^{n} g(x)\sin(xy)\,\mathrm{d}x.$$

D'après la question précédente, on a pour tout $y \neq 0$

$$\psi(y) = \lim_{n}\int_{-n}^{n} g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{i}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos(xy)}{(4+x^2)y}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\mathrm{i}y}\int_{\mathbb{R}}\frac{1-\cos(xy)}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}y}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-2|y|}\Big)$$

d'après la question **b**, appliquée pour y et pour $y=0$. Puisque la limite $\psi(y)$ existe pour tout $y \neq 0$, on en déduit que presque partout

$$(\mathcal{F}g)(y) = \pi\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2|y|}}{2\,\mathrm{i}y}.$$

— *Exercice II* —

On définit une mesure μ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$ en posant $\mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; on rappelle la formule d'intégration en coordonnées polaires : si φ est une fonction réelle ≥ 0 et continue sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2}\varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x,y)\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{2\pi}\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{e}^{-r}\,r\,\mathrm{d}r.$$

On désignera par H l'espace de Hilbert complexe $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_2,\mu)$ muni du produit scalaire habituel $\langle f,g\rangle_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^2} f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la fonction complexe f_n sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f_n(x,y) = (x+\mathrm{i}y)^n.$$

a. *Vérifier que $f_n(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$; montrer que f_n appartient à l'espace H, et calculer $\langle f_n, f_n\rangle_{\mathrm{H}}$ (on rappelle que $\int_0^{+\infty} r^k\,\mathrm{e}^{-r}\,\mathrm{d}r = k!$ pour tout entier $k \geq 0$). Montrer que $\langle f_m, f_n\rangle_{\mathrm{H}} = 0$ quand $m \neq n$.*

Preuve. — On a

$$f_n(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r\cos\theta + \mathrm{i}\,r\sin\theta)^n = \big(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

Ensuite

$$\langle f_n, f_n\rangle_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^2}|f_n|^2\,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{2\pi} r^{2n}\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{e}^{-r}\,r\,\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi\int_0^{+\infty} r^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-r}\,\mathrm{d}r = 2\pi\,(2n+1)!$$

On a quand $m \neq n$

$$\langle f_m, f_n\rangle_{\mathrm{H}} = \int_{\mathbb{R}^2} f_m\,\overline{f_n}\,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{2\pi} r^{m+n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{e}^{-r}\,r\,\mathrm{d}r = 0,$$

car pour $m-n \neq 0$ on a

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\theta}}{\mathrm{i}(m-n)}\Big]_{\theta=0}^{2\pi} = 0.$$

Dans la suite, on suppose que les coefficients scalaires $(c_n)_{n\geq 0}$ sont tels que la série de vecteurs $\sum_{n\geq 0} c_n f_n$ converge dans l'espace de Hilbert H.

b. *En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ converge.*

Preuve. — On a vu que les vecteurs (f_n) sont deux à deux orthogonaux. Si la série $\sum_{n\geq 0} c_n f_n$ de vecteurs orthogonaux converge, on sait que

$$\sum \|c_n f_n\|^2 < +\infty$$

c'est-à-dire

$$\sum |c_n|^2 (2n+1)! < +\infty.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque ; par Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n||z|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|\sqrt{(2n+1)!}\ \frac{|z|^n}{\sqrt{(2n+1)!}} \leq$$

$$\leq \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2(2n+1)!\Bigr)^{1/2} \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n}}{(2n+1)!}\Bigr)^{1/2} < +\infty.$$

On désignera par g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $g(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x+\mathrm{i}y)^n$, et par $h = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n f_n$ le vecteur de $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2, \mu)$ qui est la somme de la série de vecteurs.

c. *Montrer que $h(x,y) = g(x,y)$ pour presque tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

Preuve. — Les sommes partielles $\mathrm{S}_n \in \mathrm{H}$, définies par

$$\mathrm{S}_n : (x,y) \to \sum_{k=0}^{n} c_k (x+\mathrm{i}y)^k$$

convergent vers h dans L^2, donc il existe une sous-suite qui converge presque partout vers $h(x,y)$; mais par ailleurs, les sommes partielles convergent simplement vers $g(x,y)$ pour tout (x,y) ; il en résulte que $h(x,y) = g(x,y)$ pour presque tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d. *Vérifier que pour tout nombre réel $t > 0$, il existe une fonction k_t continue sur $\mathbb{R}^2$ et de la forme $k_t(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(t)(x+\mathrm{i}y)^n$, telle que pour tout $x > 0$ on ait*

$$k_t(x,0) = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{tx})}{\sqrt{tx}}.$$

Montrer que $k_t \in \mathrm{H}$ et $\langle h, k_t\rangle_{\mathrm{H}} = 2\pi g(t,0)$.

Preuve. — On doit avoir pour $y = 0$

$$k_t(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(t)x^n = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{tx})}{\sqrt{tx}} = (tx)^{-1/2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tx)^{(2k+1)/2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k x^k}{(2k+1)!}.$$

Par identification, on prend donc pour tout entier $n \geq 0$

$$d_n(t) = \frac{t^n}{(2n+1)!}.$$

On voit que

$$\sum |d_n(t)|^2 \langle f_n, f_n\rangle = \sum |d_n(t)|^2 (2n+1)! = \sum \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} < +\infty,$$

donc $k_t = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(t) f_n$ converge dans H. Pour finir,

$$\langle h, k_t\rangle_{\mathrm{H}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \overline{d_n(t)} \langle f_n, f_n\rangle = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \overline{d_n(t)} (2n+1)! = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = 2\pi g(t,0).$$