Analyse hilbertienne et de Fourier, examen de rattrapage du 27 juin 2008

Les documents sont interdits *durée 3h*

— *Exercice I* —

a. On considère un nombre complexe fixé $z = a + \mathrm{i}b$, avec a, b réels et $a > 0$; on définit la fonction G_z sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_z(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)\, \mathrm{e}^{-zx}.$$

Vérifier que G_z est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{G}_z}$.

b. On suppose de plus $b > 0$ et on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_z(x) = \frac{a^2+b^2}{b}\, \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \sin(bx)\, \mathrm{e}^{-ax}.$$

À partir du résultat de la question **a**, déduire la transformée de Fourier de g_z.

c. On donne $r > 0$, on suppose que $a = b = r/\sqrt{2}$, donc $z = r(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$; pour u réel, exprimer $\widehat{g_z}(ru)$ en fonction de u. Montrer que

$$\bigl|\widehat{g_z}(ru)\bigr|^2 = \frac{1}{1+u^4}.$$

d. On garde les valeurs r, z de la question **c** précédente. On considère un «signal» $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tel que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty}\, \mathrm{d}y,$$

où la fonction φ est continue à support compact, et telle que $\varphi(y) = 0$ quand $|y| \le 4r$. Démontrer que f appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On considère ensuite le «signal filtré» h_z défini par

$$h_z(t) = \int_0^{+\infty} f(t-s)\, g_z(s)\, \mathrm{d}s.$$

Montrer que

$$\|h_z\|_2 \le \frac{1}{16}\, \|f\|_2.$$

— *Exercice II* —

Dans tout l'exercice on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)\bigl(1 - |x|/\pi\bigr).$$

a. Tracer sommairement le graphe de F. Vérifier que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{F}}$.

b. On désigne par f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est égale à F sur $[-\pi, \pi]$. Tracer sommairement le graphe de f. Déduire de la question **a** la valeur des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$; montrer qu'il existe des coefficients réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

et calculer ces coefficients $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

Montrer que $f(x) + f(x+\pi) = 1$ pour tout x réel, d'abord en utilisant la formule de définition de $\mathrm{F}(x)$, puis en utilisant le développement en série de Fourier de f.

c. En vous inspirant de la question **b**, caractériser par des propriétés des coefficients de Fourier réels les fonctions G réelles continues sur $\mathbb{R}$, paires, nulles hors de $[-\pi, \pi]$, qui sont telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{G}}(n)| < +\infty$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(x + n\pi) = 1$ pour tout x réel. Donner un exemple simple d'une telle fonction G, qui soit différente de la fonction F.

d. On fixe un nombre réel $w \notin \mathbb{Z}$. On désigne par f_w la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f_w(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx}\, \mathrm{F}(x)$ si $-\pi \le x < \pi$. Vérifier que f_w est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Calculer les coefficients de Fourier complexes de f_w ; exprimer $f_w(0) + f_w(\pi)$ à l'aide de la série de Fourier et en déduire la valeur de

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(w+2n)^2}.$$

Rappels.

Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction $\mathbf{1}_{\mathrm{J}}$ est égale à 1 sur l'ensemble J et à 0 en dehors de J : on a $\mathbf{1}_{\mathrm{J}}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{J}$ et $= 0$ sinon.

Si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions f réelles ou complexes $\mathcal{A}$-mesurables sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$; la norme de cet espace est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega) \Big)^{1/p},$$

et $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet pour cette norme. On note simplement $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathrm{d}x)$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est définie sur l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en associant à toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x.$$

Quand $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{f}$ est continue, et elle est bornée par $\|f\|_1$. Quand f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f et $\widehat{f}$ sont intégrables, on a la formule *d'inversion de Fourier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}y.$$

Lorsque $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la convolution $f * g$ est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. De plus, la transformée de Fourier $\widehat{f * g}$ est donnée par le produit ponctuel des transformées de f et de g,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad (\widehat{f * g})(y) = \widehat{f}(y)\,\widehat{g}(y).$$

Lorsque $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est la limite dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ de la suite $(\widehat{g_n})$ des transformées de Fourier des fonctions intégrables $g_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}\, g$. Si g est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}g = \widehat{g}$ presque partout. La relation de Parseval affirme que

$$\forall g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathcal{F}g\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|g\|_2.$$

Séries de Fourier

Si f est une fonction intégrable sur $[-\pi, \pi]$ on définit les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ par

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

et les *coefficients de Fourier réels* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ en posant

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,; \quad \forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Les fonctions $\mathbf{1}$, et $x \to \sqrt{2}\cos(nx)$, $x \to \sqrt{2}\sin(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2([-\pi, \pi], \mathrm{d}x/(2\pi))$. Les sommes de Fourier de la fonction f sont données pour tout entier $n \geq 0$ par

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \big).$$

Lorsque f est 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux, on sait que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty, \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$