Analyse hilbertienne et de Fourier, corrigé de l'examen de rattrapage du 27 juin 2008

— *Exercice I* —

a. *On considère un nombre complexe fixé $z = a + \mathrm{i}b$, avec a, b réels et $a > 0$; on définit la fonction G_z sur $\mathbb{R}$ en posant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}_z(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)\, \mathrm{e}^{-zx}.$$

Vérifier que G_z est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa transformée de Fourier $\widehat{\mathrm{G}_z}$.

Preuve. — On voit que pour $x \ge 0$

$$|\mathrm{G}_z(x)| = \left|\mathrm{e}^{-ax-\mathrm{i}bx}\right| = \mathrm{e}^{-ax},$$

qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisqu'on sait que $a > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{G}_z(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Ensuite, pour tout y réel

$$\widehat{\mathrm{G}_z}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{G}_z(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zx-\mathrm{i}yx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(z+\mathrm{i}y)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{z+\mathrm{i}y}\,\cdot$$

b. *On suppose de plus $b > 0$ et on pose*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_z(x) = \frac{a^2+b^2}{b}\,\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)\sin(bx)\,\mathrm{e}^{-ax}.$$

À partir du résultat de la question **a**, *déduire la transformée de Fourier de g_z.*

Preuve. — En écrivant sin à partir de l'exponentielle complexe, il vient

$$\sin(bx)\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b)x} - \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}b)x}\big),$$

donc

$$\widehat{g_z}(y) = \frac{a^2+b^2}{2\mathrm{i}b}\,\big(\widehat{\mathrm{G}}_{a-\mathrm{i}b}(y) - \widehat{\mathrm{G}}_{a+\mathrm{i}b}(y)\big) = \frac{a^2+b^2}{2\mathrm{i}b}\Big(\frac{1}{a-\mathrm{i}b+\mathrm{i}y} - \frac{1}{a+\mathrm{i}b+\mathrm{i}y}\Big)$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2\mathrm{i}b}\,\frac{2\mathrm{i}b}{(a-\mathrm{i}b+\mathrm{i}y)(a+\mathrm{i}b+\mathrm{i}y)} = \frac{a^2+b^2}{(a+\mathrm{i}y)^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2-y^2+2\mathrm{i}ay}\,\cdot$$

c. *On donne $r > 0$, on suppose que $a = b = r/\sqrt{2}$, donc $z = r(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}$; pour u réel, exprimer $\widehat{g_z}(ru)$ en fonction de u. Montrer que*

$$\left|\widehat{g_z}(ru)\right|^2 = \frac{1}{1+u^4}.$$

Preuve. — On reporte les valeurs de a, b dans l'expression de $\widehat{g_z}$ obtenue à la question **b**,

$$\widehat{g_z}(ru) = \frac{r^2}{r^2 - r^2u^2 + 2\mathrm{i}r^2u/\sqrt{2}} = \frac{1}{1-u^2+\mathrm{i}\sqrt{2}u}\,\cdot$$

Le carré du module du dénominateur vaut

$$(1-u^2)^2 + 2u^2 = 1 - 2u^2 + u^4 + 2u^2 = 1 + u^4,$$

d'où le résultat.

d. *On garde les valeurs r, z de la question* **c** *précédente. On considère un «signal» $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, tel que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et de la forme*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty}\, \mathrm{d}y,$$

où la fonction φ est continue à support compact, et telle que $\varphi(y) = 0$ quand $|y| \le 4r$. Démontrer que f appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On considère ensuite le «signal filtré» h_z défini par

$$h_z(t) = \int_0^{+\infty} f(t-s)\, g_z(s)\, \mathrm{d}s.$$

Montrer que

$$\|h_z\|_2 \le \frac{1}{16}\, \|f\|_2.$$

Preuve. — On voit que

$$\widehat{\varphi}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ty}\, \mathrm{d}y = 2\pi f(-t),$$

et comme on a supposé que f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on trouve que la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ est intégrable ; comme φ est continue à support compact, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$: il en résulte par l'inversion de Fourier appliquée à φ que pour tout y, on a

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(-t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}yt}\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yu}\, \mathrm{d}u = \widehat{f}(y).$$

On voit que $h_z = f * g_z$: comme $g_z(s)$ est nul pour $s < 0$, on a

$$h_z(t) = \int_0^{+\infty} f(t-s)\, g_z(s)\, \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)\, g_z(s)\, \mathrm{d}s = (f * g_z)(t).$$

D'après les rappels,

$$\widehat{h_z}(y) = \widehat{f}(y)\, \widehat{g_z}(y)$$

et d'après Parseval,

$$2\pi\, \|h_z\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{h_z}(y)|^2\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\, |\widehat{g_z}(y)|^2\, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{|y|>4r} |\widehat{f}(y)|^2\, |\widehat{g_z}(y)|^2\, \mathrm{d}y$$

puisque d'après l'hypothèse, on a $\widehat{f}(y) = 0$ si $|y| \le 4r$; mais quand $|y| > 4r$ on sait d'après la question **c** (appliquée avec $|u| > 4$) que

$$|\widehat{g_z}(y)|^2 \le \frac{1}{1+4^4} < 4^{-4},$$

et en reportant dans le calcul précédent on obtient

$$2\pi \|h_z\|_2^2 = \int_{|y|>4r} |\widehat{f}(y)|^2\, |\widehat{g_z}(y)|^2\, \mathrm{d}y \le 4^{-4} \int_{|y|>4r} |\widehat{f}(y)|^2\, \mathrm{d}y$$

$$= 4^{-4} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\, \mathrm{d}y = 2\pi\, 4^{-4} \|f\|_2^2,$$

en appliquant Parseval à f. Après division par 2π et prise de la racine carrée, on a bien obtenu

$$\|h_z\|_2 \le 4^{-2} \|f\|_2 = \frac{1}{16}\, \|f\|_2.$$

— *Exercice II* —

Dans tout l'exercice on considère la fonction F *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x)\big(1 - |x|/\pi\big).$$

a. *Tracer sommairement le graphe de* F*. Vérifier que* F *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer sa transformée de Fourier* $\widehat{\mathrm{F}}$*.*

Preuve. — On voit que $0 \le \mathrm{F} \le \mathbf{1}_{(-\pi,\pi]}$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{F}(x)| \,\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi,$$

donc F est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme F est paire on a

$$\widehat{\mathrm{F}}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} (1 - x/\pi)\cos(xy)\,\mathrm{d}x$$

qui vaut pour $y \ne 0$, en intégrant par parties

$$\widehat{\mathrm{F}}(y) = 2\Big(\Big[(1 - x/\pi)\frac{\sin(xy)}{y}\Big]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(xy)}{\pi y}\,\mathrm{d}x\Big)$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{-\cos(xy)}{y^2}\Big]_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\,\frac{1 - \cos(\pi y)}{y^2} = \frac{4\sin^2(\pi y/2)}{\pi y^2}.$$

Le résultat pour $y = 0$ peut être obtenu par calcul direct, ou bien en prolongeant par continuité quand $y \to 0$. On obtient, d'une façon ou de l'autre

$$\widehat{\mathrm{F}}(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

b. *On désigne par f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est égale à* F *sur $[-\pi,\pi]$. Tracer sommairement le graphe de f. Déduire de la question* **a** *la valeur des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$; montrer qu'il existe des coefficients réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

et calculer ces coefficients $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

Montrer que $f(x)+f(x+\pi) = 1$ pour tout x réel, d'abord en utilisant la formule de définition de $\mathrm{F}(x)$*, puis en utilisant le développement en série de Fourier de f.*

Preuve. — La fonction f est continue et de classe C^1 par morceaux. On s'attend à trouver des coefficients de Fourier absolument sommables, ce que le calcul va confirmer. On a

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\,inx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\,\mathrm{e}^{-\,inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{\mathrm{F}}(n),$$

donc

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{\mathrm{F}}(0) = \frac{1}{2}$$

et pour $n \ne 0$

$$c_n(f) = \frac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}.$$

On note que $c_n = 0$ quand n est pair $\ne 0$. Quand $n = 2k+1$, on a

$$c_{2k+1}(f) = \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Comme les coefficients sont absolument sommables, on sait que pour tout x

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

et en groupant n et $-n$ on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi^2\,(2k+1)^2}\,\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(2k+1)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(2k+1)x}\bigr) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4\cos\bigl((2k+1)x\bigr)}{\pi^2\,(2k+1)^2}\,.$$

On note que $f(x) + f(x+\pi)$ est π-périodique ; en effet

$$f(x+\pi) + f(x+2\pi) = f(x+\pi) + f(x)\,;$$

pour montrer que $f(x) + f(x+\pi) = 1$, il suffit donc de faire la vérification sur $[0,\pi]$; quand $0 \le x \le \pi$, on a $f(x) = \mathrm{F}(x) = 1 - x/\pi$, et d'autre part $-\pi \le x - \pi \le 0$ donc

$$f(x+\pi) = f(x-\pi) = \mathrm{F}(x-\pi) = 1 - |x-\pi|/\pi = 1 + (x-\pi)/\pi = x/\pi\,;$$

on a bien $f(x) + f(x+\pi) = (1 - x/\pi) + x/\pi = 1$.

D'une autre façon, en utilisant la série de Fourier, on trouve pour tout x réel

$$f(x) + f(x+\pi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2\,(2k+1)^2}\Bigl(\cos\bigl((2k+1)x\bigr) + \cos\bigl((2k+1)(x+\pi)\bigr)\Bigr) = 1,$$

car $\cos\bigl((2k+1)(x+\pi)\bigr) = \cos\bigl((2k+1)x+\pi\bigr) = -\cos\bigl((2k+1)x\bigr)$.

c. *En vous inspirant de la question* **b**, *caractériser par des propriétés des coefficients de Fourier réels les fonctions* G *réelles continues sur* $\mathbb{R}$, *paires, nulles hors de* $[-\pi,\pi]$, *qui sont telles que* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{G}}(n)| < +\infty$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(x+n\pi) = 1$ *pour tout* x *réel. Donner un exemple simple d'une telle fonction* G, *qui soit différente de la fonction* F.

Preuve. — Si on considère la fonction périodique g qui est égale à G sur $[-\pi,\pi]$, on voit comme avant que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{\mathrm{G}}(n),$$

donc les coefficients de Fourier de g sont absolument sommables. Par la parité de G (réelle) on voit que $c_n(g) = c_{-n}(g)$ et on obtient comme pour f une représentation de g en tout point par une série de cosinus. On peut donc écrire en posant $u_n = 2c_n(g)$ pour tout $n \ge 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \cos(nx).$$

Comme G est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-\pi,\pi]$, on a $\mathrm{G}(-\pi) = \mathrm{G}(\pi) = 0$. Pour avoir $g(\pi) = \mathrm{G}(\pi) = 0$, il faut que les coefficients (u_n) vérifient la condition

$$(*) \qquad 0 = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \cos(n\pi) = \frac{u_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} u_{2m} - \sum_{m=0}^{+\infty} u_{2m+1}.$$

La fonction g est égale à

$$h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(x+2\pi n)\,;$$

en effet, si $|x| \le \pi$ et $n \ne 0$, on a $|x+2\pi n| \ge 2\pi - |x| \ge \pi$, donc $\mathrm{G}(x+2\pi n) = 0$ pour tout $n \ne 0$; on a donc

$$h(x) = \mathrm{G}(x)$$

quand $|x| \le \pi$; on vérifie de même qu'en tout point x, la série qui définit $h(x)$ contient au plus un terme non nul, donc h est bien définie sur $\mathbb{R}$, et clairement 2π-périodique ; ainsi h est 2π-périodique et coïncide avec G sur $[-\pi, \pi[$, ce qui implique $h = g$. On voit donc que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(x+\pi n) = g(x) + g(x+\pi) = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\big(\cos(nx) + \cos(nx+n\pi)\big).$$

Quand n est impair, on a $\cos(nx) + \cos(nx + n\pi) = 0$, donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{G}(x+\pi n) = u_0 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} u_{2m}\cos(2mx).$$

Pour que cette fonction soit constamment égale à 1, on doit avoir $u_0 = 1$ et $u_{2m} = 0$ pour tout m non nul (unicité des coefficients de Fourier). L'exemple le plus simple qui vérifie ceci, et de plus la condition $(*)$, est obtenu en prenant $u_0 = 1$, $u_1 = 1/2$ et tous les autres coefficients nuls,

$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{2} = \cos^2(x/2).$$

d. *On fixe un nombre réel $w \notin \mathbb{Z}$. On désigne par f_w la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f_w(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx}\,\mathrm{F}(x)$ si $-\pi \le x < \pi$. Vérifier que f_w est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Calculer les coefficients de Fourier complexes de f_w ; exprimer $f_w(0) + f_w(\pi)$ à l'aide de la série de Fourier et en déduire la valeur de*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(w+2n)^2}.$$

Preuve. — Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\widehat{f_w}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_w(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\,\widehat{\mathrm{F}}(w+n).$$

La fonction f_w est continue sur $\mathbb{R}$ parce que $\mathrm{F}_w(\pi) = 0 = \mathrm{F}(\pi) = \mathrm{F}_w(-\pi)$; sur l'intervalle ouvert $]-\pi, 0[$, on a $\mathrm{F}_w(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx}(1 + x/\pi)$ qui est dérivable sur cet intervalle avec

$$\mathrm{F}'_w(x) = -\mathrm{i}w\mathrm{F}_w(x) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}wx}/\pi,$$

qui se prolonge par continuité à l'intervalle fermé $[-\pi, 0]$ (en utilisant l'expression du second membre). D'après le cours, on a pour tout x

$$f_w(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_w)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\sin^2(\pi(w+n)/2)}{\pi^2\,(w+n)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

On a donc

$$f_w(0) + f_w(\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f_w)\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\sin^2(\pi(w+n)/2)}{\pi^2\,(w+n)^2}\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\right).$$

Comme $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} = 0$ pour tout n impair, il ne reste que les termes pairs,

$$1 = f_w(0) + f_w(\pi) = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\sin^2\big(\pi(w+2n)/2\big)}{\pi^2\,(w+2n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{4\sin^2(\pi w/2 + n\pi)}{\pi^2\,(w+2n)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{4\sin^2(\pi w/2)}{\pi^2\,(w+2n)^2}$$

donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(w+2n)^2} = \frac{\pi^2}{4\sin^2(\pi w/2)}.$$