Analyse hilbertienne et de Fourier, examen partiel du 30 mars 2009

Les documents sont interdits *durée 3h*

— *Exercice I* —

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour tout x réel.

a. Vérifier que f est intégrable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.

Pour tout entier $n \geq 1$ on définit une fonction g_n impaire sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $g_n(x) = -g_n(-x)$ pour tout x) en posant pour tout $x > 0$

$$g_n(x) = x^{-1/2} \quad \text{si} \quad 0 < x \leq n, \quad \text{et} \quad g_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > n.$$

b. Vérifier que g_n appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Exprimer la transformée de Fourier de g_n ; montrer que la transformée de Fourier $\widehat{g_n}$ est impaire.

c. Montrer que la transformée de Fourier de $f * g_n$ est une fonction paire, qui est égale pour $y > 0$ à

$$\kappa\,\sqrt{y}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\Big(\int_0^{ny} t^{-1/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t\Big),$$

où κ est une constante qu'on calculera.

Pour la question suivante, on pourra admettre sans démonstration que l'intégrale généralisée

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente.

d. Peut-on appliquer le théorème d'inversion pour exprimer $(f * g_n)(0)$ à partir de la transformée de Fourier de $f * g_n$? Exprimer $(f * g_n)(0)$ de deux façons, puis faire tendre n vers $+\infty$ pour montrer que $\mathrm{I} = \sqrt{\pi/2}$.

— *Exercice II* —

Dans cet exercice, on désigne par H l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ avec son produit scalaire habituel.

a. On désigne par φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 1 - |x|$ quand $|x| \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ quand $|x| > 1$. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$.

b. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on pose $f_n(x) = \varphi(x - n)$. Calculer $\widehat{f_n}$. Sur un même schéma, indiquer les graphes de f_0, f_1 et f_2. Calculer les produits scalaires $\langle f_0, f_0\rangle$ et $\langle f_0, f_1\rangle$, puis calculer $\langle f_0, f_k\rangle$ pour tout entier $k \geq 2$. Montrer que $\langle f_n, f_{n+p}\rangle$ ne dépend que de p.

c. Déterminer a réel tel que $-1 < a < 0$ et tel que f_1 et $f_0 + af_1 + a^2 f_2$ soient orthogonales (on trouvera que a est racine d'une équation du second degré). Montrer que la série de fonctions

$$g = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k f_k$$

converge uniformément, et converge dans H. Montrer que g est orthogonale à f_p, pour tout $p \geq 1$. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{g}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose $g_n(x) = g(x - n)$. Montrer que les fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux à deux orthogonales. On considère le sous-espace fermé F de H engendré par les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Montrer qu'il existe une constante b telle que la famille $(bg_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une base hilbertienne de F. Calculer b.

Rappels.

Si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions f réelles ou complexes $\mathcal{A}$-mesurables sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$; la norme de cet espace est définie par

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu(\omega)\Big)^{1/p},$$

et $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est complet pour cette norme. Dans le cas de $\mathbb{R}$, on écrit simplement $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.

Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est définie sur l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ en associant à toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $\widehat{f}$ définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}x.$$

Quand $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $\widehat{f}$ est continue, et elle est bornée par $\|f\|_1$. Pour la fonction gaussienne $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$, on trouve que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(y) = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-y^2/2}\,.$$

Quand f est continue sur $\mathbb{R}$ et que f et $\widehat{f}$ sont intégrables, on a la formule *d'inversion de Fourier*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} \,\mathrm{d}y.$$

Si f et $x \to x\, f(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est dérivable, et sa dérivée est la transformée de Fourier de $x \to -\mathrm{i}x\, f(x)$.

Quand f et g sont dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la convolution $f * g$ est définie pour presque tout x par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) \,\mathrm{d}t\,;$$

la fonction $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier est égale au produit de $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$.

L'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \,\mathrm{d}x.$$

Lorsque $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est la limite dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ de la suite $(\widehat{g_n})$ des transformées de Fourier des fonctions intégrables $g_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}\, g$. Si g est à la fois dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}g = \widehat{g}$ presque partout. La relation de Parseval affirme que

$$\forall g_1, g_2 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{F}g_1, \mathcal{F}g_2 \rangle = 2\pi\, \langle g_1, g_2 \rangle.$$

Séries de vecteurs

Dans un espace normé E, le vecteur $s \in \mathrm{E}$ est la somme de la série de vecteurs $\sum_{n \geq 0} x_n$ si $\|s - \sum_{k=0}^n x_k\|_{\mathrm{E}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Une série de vecteurs d'un espace normé *complet* converge dans E dès que $\sum \|x_n\|_{\mathrm{E}} < +\infty$, et dans ce cas le vecteur s somme de la série vérifie

$$\|s\|_{\mathrm{E}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|_{\mathrm{E}}.$$

Si la série de vecteurs converge dans E, et si ℓ est une forme linéaire continue sur E, on a

$$\ell\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell(x_n).$$