cours 1, le jeudi 28 janvier 2010

I. Intégrale de Riemann

I.1. Intégrale de Riemann sur $[a, b]$

I.1.1. *Fonctions en escalier*

Une *subdivision* π de $[a, b]$ est la donnée d'un ensemble fini de points de $[a, b]$, contenant les deux extrémités a et b de l'intervalle ; on peut classer les points de π en ordre croissant, et on écrira

$$\pi : (x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{\mathrm{N}} = b).$$

La subdivision ρ est plus fine que π s'il y a plus de points (au sens large : ρ a au moins autant de points que π). Étant données deux subdivisions π_1 et π_2, on peut introduire une subdivision ρ plus fine que les deux, en rassemblant tous les points de π_1 et de π_2.

Définition. On dit qu'une fonction réelle $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $\pi : (x_0 < x_1 < \ldots < x_{\mathrm{N}})$ de $[a, b]$ telle que la fonction φ soit constante sur chaque intervalle *ouvert* (x_{i-1}, x_i) de la subdivision, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$.

On dira alors que π est adaptée à φ.

Notation. Si A est un sous-ensemble de X, $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ désigne la *fonction indicatrice de* A, égale à 1 sur A et à 0 en dehors.

Les fonctions en escalier sur $[a, b]$ sont les éléments de l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\mathbf{1}_{[c,d]}$, $a \le c \le d \le b$: on peut observer que si $c < d$,

$$\mathbf{1}_{]c,d[} = \mathbf{1}_{[c,d]} - \mathbf{1}_{[c,c]} - \mathbf{1}_{[d,d]},$$

qui est bien une combinaison linéaire de fonctions de la forme annoncée, et il est clair qu'on peut reconstruire toutes les fonctions étagées à partir des indicatrices des singletons et des indicatrices des intervalles ouverts.

Si π est adaptée à φ, toute subdivision ρ plus fine que π reste adaptée à φ ; en effet, chaque intervalle ouvert (y_{j-1}, y_j) de ρ est contenu dans un intervalle de π, sur lequel φ reste constante.

Opérations sur les fonctions en escalier : sommes, valeur absolue, produits

On donne deux fonctions en escalier φ_j avec des subdivisions adaptées π_j, $j = 1, 2$; on introduit ρ plus fine que π_1 et π_2 ; alors φ_1 et φ_2 sont constantes sur les intervalles ouverts de ρ ; par conséquent, les fonctions

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2, \quad |\varphi_1|, \quad \varphi_1 \varphi_2$$

sont constantes aussi sur les intervalles ouverts de ρ (plus généralement, toutes les fonctions $f(\varphi_1, \varphi_2)$ de φ_1 et φ_2 sont constantes sur les intervalles ouverts de ρ). Les fonctions précédentes sont donc en escalier, et la subdivision ρ est adaptée à ces fonctions.

On pose pour φ en escalier et π adaptée à φ, c_i étant la valeur constante de φ sur l'intervalle (x_{i-1}, x_i) de la subdivision,

$$\Sigma_\pi(\varphi) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - x_{i-1}) c_i.$$

Cette expression est indépendante de la subdivision π adaptée à φ (l'expression ne dépend donc que de la fonction φ) : on montre d'abord que la somme ne varie pas quand on passe à une subdivision ρ plus fine que π. On peut le faire pas à pas, par récurrence sur la différence entre le nombre de points de ρ et de π. Si on obtient ρ en ajoutant un unique point y à la subdivision π, ce point tombe entre deux des points de π, disons entre x_{i_0-1} et x_{i_0},

$$x_{i_0-1} < y < x_{i_0}\ ;$$

la fonction φ est constante égale à c_{i_0} sur (x_{i_0-1}, x_{i_0}) et donc également constante égale à c_{i_0} sur les deux parties (x_{i_0-1}, y) et (y, x_{i_0}) de cet intervalle. Alors

$$(x_{i_0} - x_{i_0-1})c_{i_0} = (y - x_{i_0-1})c_{i_0} + (x_{i_0} - y)c_{i_0}\ ;$$

la subdivision ρ est formée des points

$$x_0 < \ldots < x_{i_0-1} < y < x_{i_0} < \ldots < x_{\mathrm{N}}$$

donc

$$\Sigma_\rho(\varphi) = \sum_{i=1}^{i_0-1}(x_i - x_{i-1})c_i + (y - x_{i_0-1})c_{i_0} + (x_{i_0} - y)c_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\mathrm{N}}(x_i - x_{i-1})c_i$$

donc $\Sigma_\pi(\varphi) = \Sigma_\rho(\varphi)$.

Si π_1 et π_2 sont deux subdivisions adaptées à φ, on peut trouver une subdivision ρ plus fine que π_1 et que π_2. On a alors

$$\Sigma_{\pi_1}(\varphi) = \Sigma_\rho(\varphi) = \Sigma_{\pi_2}(\varphi),$$

ce qui justifie la définition de l'intégrale de φ donnée ci-dessous.

Intégrale d'une fonction en escalier

Définition. *L'intégrale* sur $[a,b]$ de la fonction en escalier φ, notée classiquement

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

est la valeur de $\Sigma_\pi(\varphi)$ pour une (quelconque) subdivision π de $[a,b]$ adaptée à φ. On se permettra d'écrire en abrégé $\int_a^b \varphi$.

Linéarité de l'intégrale

Si φ et ψ sont en escalier, on a vu que $\lambda\varphi + \mu\psi$ est en escalier, et on a

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\int_a^b \varphi + \mu\int_a^b \psi.$$

Pour le montrer, il suffit de passer à une subdivision ρ : $(y_0 < y_1 < \ldots < y_{\mathrm{M}})$ adaptée en même temps aux deux fonctions φ et ψ. Si les c_j, d_j sont les valeurs constantes de φ, ψ sur les intervalles ouverts (y_{j-1}, y_j) de ρ, $j = 1, \ldots, \mathrm{M}$, on a

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) = \Sigma_\rho(\lambda\varphi + \mu\psi) = \sum_{j=1}^{\mathrm{M}}(y_j - y_{j-1})(\lambda c_j + \mu d_j)$$

$$= \lambda\Big(\sum_{j=1}^{\mathrm{M}}(y_j - y_{j-1})c_j\Big) + \mu\Big(\sum_{j=1}^{\mathrm{M}}(y_j - y_{j-1})d_j\Big) = \lambda\int_a^b \varphi + \mu\int_a^b \psi.$$

Positivité, croissance de l'intégrale

Si φ est une fonction en escalier ≥ 0, il est clair que $\int_a^b \varphi \geq 0$ (les valeurs c_i de φ sont ≥ 0 et l'expression de $\Sigma_\pi(\varphi)$ est une somme de nombres $(x_i - x_{i-1})c_i \geq 0$). Avec la linéarité on obtient que

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \Rightarrow \int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b \varphi_2,$$

(propriété de croissance de l'intégrale) puisque la positivité de $\varphi_2 - \varphi_1$ implique que

$$0 \leq \int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1) = \int_a^b \varphi_2 - \int_a^b \varphi_1\,;$$

on a aussi la majoration

$$\Bigl| \int_a^b \varphi \Bigr| \leq \int_a^b |\varphi|,$$

obtenue à partir de l'encadrement $-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$ et de la croissance de l'intégrale, ou bien directement à partir de l'inégalité triangulaire,

$$\Bigl| \int_a^b \varphi \Bigr| = \Bigl| \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - x_{i-1}) c_i \Bigr| \leq \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - x_{i-1}) |c_i| = \int_a^b |\varphi|.$$

Découpage de $[a, b]$

On donne une fonction en escalier φ sur $[a, b]$, et un point y tel que $a < y < b$; en ajoutant éventuellement le point y, on peut trouver une subdivision ρ adaptée à φ et contenant le point y, disons comme point x_{k_0}. La restriction de φ à l'intervalle $[a, y]$ est en escalier et

$$\int_a^y \varphi = \sum_{i=1}^{k_0} (x_i - x_{i-1}) c_i\,;$$

la restriction de φ à $[y, b]$ est aussi en escalier, et

$$\int_y^b \varphi = \sum_{i=k_0+1}^{\mathrm{N}} (x_i - x_{i-1}) c_i,$$

donc

$$\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - x_{i-1}) c_i = \int_a^y \varphi + \int_y^b \varphi.$$

I.1.2. *Intégrale de Riemann*

Définition. On dit qu'une fonction f réelle définie sur $[a,b]$ est *Riemann-intégrable* si : la fonction f est bornée sur $[a,b]$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ_1, φ_2 en escalier telles que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ et

$$\int_a^b \varphi_2 - \int_a^b \varphi_1 < \varepsilon.$$

Cela revient à dire que :

$$\sup\Big\{\int_a^b \varphi_1 : \varphi_1 \leq f\Big\} = \inf\Big\{\int_a^b \varphi_2 : f \leq \varphi_2\Big\}.$$

Par définition, l'intégrale d'une fonction R-intégrable f est la valeur commune,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\Big\{\int_a^b \varphi_1 : \varphi_1 \leq f\Big\} = \inf\Big\{\int_a^b \varphi_2 : f \leq \varphi_2\Big\}.$$

Exemple : *les fonctions monotones sont R-intégrables.*

Preuve. — Supposons par exemple que f soit croissante. On découpe $[a,b]$ en N parties égales et on définit φ_1 et φ_2 ainsi : sur chaque intervalle (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$ on pose $\varphi_1(x) = f(x_{i-1})$, $\varphi_2(x) = f(x_i)$; comme f est croissante, on a sur l'intervalle (x_{i-1}, x_i)

$$\varphi_1(x) = f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i) = \varphi_2(x)\,;$$

on complète la définition de φ_1 et φ_2 en posant $\varphi_1(x_i) = \varphi_2(x_i) = f(x_i)$ pour chaque $i = 0, \ldots, \mathrm{N}$. Alors, φ_1 et φ_2 sont en escalier, on a $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ et

$$\int_a^b \varphi_1 = \frac{b-a}{\mathrm{N}}\big(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{\mathrm{N}-1})\big),$$

$$\int_a^b \varphi_2 = \frac{b-a}{\mathrm{N}}\big(f(x_1) + \cdots + f(x_{\mathrm{N}-1}) + f(x_{\mathrm{N}})\big),$$

donc

$$\int_a^b \varphi_2 - \int_a^b \varphi_1 = \frac{b-a}{\mathrm{N}}\big(f(x_{\mathrm{N}}) - f(x_0)\big) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\mathrm{N}},$$

qui tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

Intégrabilité par approximation

Lemme. *La fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est R-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ, ψ en escalier telles que*

$$(*) \qquad |f - \varphi| \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi < \varepsilon.$$

Preuve. — Si f est R-intégrable, encadrée par $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$, on choisit $\varphi = \varphi_2$ et on écrit

$$|\varphi - f| = |\varphi_2 - f| = \varphi_2 - f \leq \psi := \varphi_2 - \varphi_1,$$

et $\int_a^b \psi < \varepsilon$. Réciproquement, s'il existe φ et ψ en escalier telles que $|f-\varphi| \le \psi$, alors f est encadrée par $\varphi_1 = \varphi - \psi$, $\varphi_2 = \varphi + \psi$, avec erreur d'intégrale $\int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1) < 2\varepsilon$.

On note que l'approximation $(*)$ indiquée dans le lemme implique

$$\Big|\int_a^b f - \int_a^b \varphi\Big| \le \int_a^b \psi.$$

En effet, on a alors $\varphi - \psi \le f \le \varphi + \psi$, donc, par définition de l'intégrale de f,

$$\int_a^b \varphi - \int_a^b \psi \le \int_a^b f \le \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi,$$

ou encore

$$-\int_a^b \psi \le \int_a^b f - \int_a^b \varphi \le \int_a^b \psi,$$

d'où le résultat.

Théorème. *Si f est une fonction réelle continue sur $[a,b]$, elle est R-intégrable.*

Preuve. — On invoque la continuité uniforme de f, fonction continue sur un fermé borné (compact). Si $\varepsilon > 0$ est donné, on choisit $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon_1(b-a) < \varepsilon$; par la continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$ dès que $|x-y| < \delta$.

On choisit une subdivision π de $[a,b]$ dont tous les intervalles soient de longueur $< \delta$, et on choisit un point $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour chaque $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$. Pour tous les points x de $[x_{i-1}, x_i]$, on a $|f(x) - f(\xi_i)| < \varepsilon_1$. Considérons la fonction en escalier φ qui est égale à $f(\xi_i)$ sur $(x_{i-1}, x_i]$ et $\varphi(a) = f(a)$; on a $|f - \varphi| < \varepsilon_1$; si on prend pour ψ la fonction constante égale à ε_1, on a l'approximation $|f - \varphi| \le \psi$ et

$$\int_a^b \psi = \varepsilon_1(b-a) < \varepsilon.$$

On a donc prouvé que f est R-intégrable.

Remarque. Il résulte de la démonstration précédente que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

où la limite est obtenue quand la taille maximale des intervalles de la subdivision tend vers 0. C'est un cas particulier du *théorème de Riemann* qui sera vu plus loin.

Propriétés de linéarité et croissance

Proposition. *Si f_1, f_2 sont R-intégrables, les combinaisons linéaires $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ sont R-intégrables et*

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \int_a^b f_1 + \lambda_2 \int_a^b f_2.$$

Si $f_1 \le f_2$, alors $\int_a^b f_1 \le \int_a^b f_2$. Si f est R-intégrable, la fonction valeur absolue $|f|$ est R-intégrable et

$$\Big|\int_a^b f\Big| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Preuve. — On donne $\varepsilon > 0$ et on choisit $\varepsilon_j > 0$ tels que $|\lambda_1|\varepsilon_1 + |\lambda_2|\varepsilon_2 < \varepsilon$. Si $|f_j - \varphi_j| \le \psi_j$ et $\int_a^b \psi_j < \varepsilon_j$, $j = 1, 2$, on aura

$$\Bigl|\lambda_j \int_a^b f_j - \lambda_j \int_a^b \varphi_j\Bigr| \le |\lambda_j|\varepsilon_j,$$

et

$$\bigl|(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) - (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)\bigr| \le |\lambda_1|\psi_1 + |\lambda_2|\psi_2 =: \psi,$$

avec $\int_a^b \psi < \varepsilon$; comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on déduit d'abord que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est R-intégrable. Ensuite,

$$\Bigl|\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) - \int_a^b (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)\Bigr| < \varepsilon\,;$$

comme l'intégrale des fonctions en escalier est linéaire, on obtient

$$\Bigl|\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) - \lambda_1 \int_a^b f_1 - \lambda_2 \int_a^b f_2\Bigr| < 2\varepsilon,$$

et comme ε est arbitraire, on en déduit l'égalité voulue.

Si $f_1 \le f_2$ on peut approcher l'intégrale de f_1 par celle d'une fonction en escalier $\varphi_1 \le f_1$ et celle de f_2 par une fonction $\varphi_2 \ge f_2$: on peut supposer que

$$\int_a^b \varphi_1 > \int_a^b f_1 - \varepsilon/2, \quad \int_a^b \varphi_2 < \int_a^b f_2 + \varepsilon/2\,;$$

on a alors $\varphi_1 \le f_1 \le f_2 \le \varphi_2$, donc $\int_a^b \varphi_1 \le \int_a^b \varphi_2$ et $\int_a^b f_1 \le \int_a^b f_2 + \varepsilon$, d'où le résultat puisque ε est > 0 quelconque.

On note que

$$\Bigl||f| - |\varphi|\Bigr| \le |f - \varphi| \le \psi,$$

donc $|f|$ est R-intégrable et la dernière inégalité résulte de la propriété de croissance de l'intégrale, comme dans le cas en escalier.

Remarque. La preuve que $|f|$ est R-intégrable se généralise aux fonctions de la forme $x \to g(f(x))$, où g est *lipschitzienne* sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que $|g(u) - g(v)| \le \mathrm{C}|u - v|$ pour tous les réels u, v ; à partir de l'approximation $|f - \varphi| \le \psi$, on obtient en effet $|g(f) - g(\varphi)| \le \mathrm{C}\psi$, avec $g(\varphi)$ en escalier et $\mathrm{C}\psi$ en escalier qui a une intégrale qu'on peut rendre aussi petite qu'on veut.

Relation de Chasles

Lemme. *On suppose que $a < y < c$. Si f est R-intégrable sur $[a, b]$, alors f est R-intégrable sur $[a, y]$ et $[y, b]$, et*

$$\int_a^b f = \int_a^y f + \int_y^b f.$$

Preuve. — En effet, il existe deux fonctions en escalier φ, ψ sur $[a, b]$ telles que $|f-\varphi| < \psi$ en tout point de $[a, b]$; cette approximation reste valable sur les deux morceaux $[a, y]$ et $[y, b]$; on a vu que
$$\int_a^y \psi + \int_y^b \psi = \int_a^b \psi,$$
qui est supposée $< \varepsilon$; on en déduit que f est R-intégrable sur $[a, y]$ et sur $[y, b]$, et
$$\Bigl|\int_a^y f - \int_a^y \varphi\Bigr| \le \int_a^y \psi, \quad \Bigl|\int_y^b f - \int_y^b \varphi\Bigr| \le \int_y^b \psi, \quad \Bigl|\int_a^b f - \int_a^b \varphi\Bigr| \le \int_a^b \psi,$$
et on a vu que
$$\int_a^y \varphi + \int_y^b \varphi = \int_a^b \varphi,$$
d'où le résultat.

Convention de notation

Si $a > b$, on pose
$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$
Attention à la majoration dans ce cas ! Pour gérer ensemble les deux possibilités $a < b$ et $a > b$, on peut écrire
$$\Bigl|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Bigr| \le \Bigl|\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\Bigr|.$$
Si on ajoute la convention
$$\int_a^a f = 0,$$
on voit que la relation de Chasles est valable dans tous les cas : si f est R-intégrable sur un segment $[u, v]$ et si a, b, c sont trois points quelconques de $[u, v]$, on a
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Primitives

Théorème. *Si f est réelle continue sur $[a, b]$ la fonction F définie sur $[a, b]$ par*
$$\forall x \in [a, b], \quad \mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
admet f pour fonction dérivée (aux deux extrémités du segment, on a seulement des demi-dérivées, $f(a) = \mathrm{F}'_d(a)$, $f(b) = \mathrm{F}'_g(b)$).

Preuve. — On la fera pour un point x_0 de l'intervalle ouvert, $a < x_0 < b$. On suppose que $|h|$ est assez petit pour que $a < x_0 - |h| < x_0 + |h| < b$. On écrit avec la relation de Chasles
$$\mathrm{F}(x_0 + h) - \mathrm{F}(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

et on écrit

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,\mathrm{d}t = hf(x_0).$$

Alors,

$$\Big|\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Comme f est continue au point x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ et tel que sur l'intervalle $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ on ait $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Si $|h| < \delta$, tous les points t entre x_0 et x_0+h sont dans $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, donc on pourra écrire si $h > 0$

$$\Big|\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \le h\varepsilon = |h|\varepsilon,$$

et si $h < 0$, on a $x_0 + h < x_0$ et

$$\Big|\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big| = \Big|\int_{x_0+h}^{x_0} (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t \le |h|\varepsilon.$$

On aura donc, pour tout h tel que $|h| < \delta$,

$$\Big|\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \le \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\mathrm{F}'(x_0) = f(x_0)$.

Formule fondamentale : *si* F *est de classe* C^1 *sur* $[a, b]$ *(la valeur* $\mathrm{F}'(a)$ *est en fait la dérivée à droite de* F *au point* a*, de même à gauche au point* b*), on a*

$$\int_a^b \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Preuve. — Posons

$$\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(a) + \int_a^x \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note que $\mathrm{G}(a) = \mathrm{F}(a)$, et d'après le théorème précédent on a $\mathrm{G}' = \mathrm{F}'$, donc la dérivée de $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ est nulle sur $[a, b]$; comme $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ est continue sur l'intervalle fermé, elle est constante d'après le théorème des Accroissements Finis. Donc $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ est constamment nulle puisque $\mathrm{G}(a) - \mathrm{F}(a) = 0$, et

$$\mathrm{G}(b) = \mathrm{F}(a) + \int_a^b \mathrm{F}'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b).$$