

III. Questions de tribus

III.1. Tribus engendrées, applications mesurables

Définition. Soient (X, \mathcal{F}) et (Y, \mathcal{G}) deux espaces mesurables, f une application de X dans Y ; on dit que f est *mesurable de (X, \mathcal{F}) dans (Y, \mathcal{G})* si l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} = \{f \in B\}$$

est dans la tribu \mathcal{F} , pour tout $B \in \mathcal{G}$.

Composition d'applications mesurables

Lemme. Si (X_1, \mathcal{F}_1) , (X_2, \mathcal{F}_2) et (X_3, \mathcal{F}_3) sont des espaces mesurables, et $f_1 : (X_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{F}_2)$, $f_2 : (X_2, \mathcal{F}_2) \rightarrow (X_3, \mathcal{F}_3)$ deux applications mesurables, alors la composée $f_2 \circ f_1$ est mesurable de (X_1, \mathcal{F}_1) dans (X_3, \mathcal{F}_3) .

Preuve. — Il suffit de remarquer que l'image inverse d'un ensemble $B \in \mathcal{F}_3$ par la composée $f_2 \circ f_1$ peut se calculer en deux fois,

$$(f_2 \circ f_1)^{-1}(B) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(B)) ;$$

puisque f_2 est une application mesurable, $f_2^{-1}(B)$ est dans \mathcal{F}_2 , et puisque f_1 est mesurable l'image inverse de $f_2^{-1}(B)$ par f_1 est dans \mathcal{F}_1 .

On rappelle que la *tribu engendrée par une classe de parties \mathcal{C}* d'un ensemble Y est la plus petite tribu de parties de Y qui contienne tous les ensembles de \mathcal{C} ; elle est notée $\sigma(\mathcal{C})$, elle est égale à l'intersection de toutes les tribus qui contiennent \mathcal{C} .

Proposition : critère de mesurabilité. On suppose que la tribu \mathcal{G} de parties de Y est engendrée par une classe \mathcal{C} , c'est-à-dire que $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$; pour que f soit une application mesurable de (X, \mathcal{F}) dans (Y, \mathcal{G}) , (il faut et) il suffit que tous les ensembles

$$f^{-1}(C) = \{f \in C\}, \quad C \in \mathcal{C},$$

soient dans \mathcal{F} .

Preuve. — Considérons la classe

$$\mathcal{D} = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} ;$$

comme l'opération f^{-1} d'image inverse commute avec les opérations ensemblistes, on vérifie facilement que \mathcal{D} est une tribu de parties de Y ; par hypothèse, \mathcal{D} contient \mathcal{C} , donc \mathcal{D} contient $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G}$, ce qui signifie que f est mesurable de (X, \mathcal{F}) dans (Y, \mathcal{G}) .

Remarque 1. On a un résultat un peu plus précis qui peut être utile : si f est une application de X dans Y et si \mathcal{C} est une classe de parties de Y , alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Le critère de mesurabilité dit que le membre de droite de l'égalité est contenu dans celui de gauche (munir X de la tribu de gauche $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$, et tester la mesurabilité de f à valeurs dans $(Y, \sigma(\mathcal{C}))$ au moyen du critère) ; il reste à remarquer que l'image inverse d'une tribu est une tribu : le membre de droite est une tribu qui contient $f^{-1}(\mathcal{C})$, donc contient la tribu engendrée $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$, membre de gauche de l'égalité.

Diverses tribus engendrées par des classes

Pour tout espace métrique (X, d) , on peut introduire la *tribu borélienne* \mathcal{B}_X , qui est la tribu de parties de X engendrée par les ouverts de X .

Remarque. Entre deux espaces métriques X et Y , les applications continues sont *boréliennes*, c'est-à-dire mesurables de (X, \mathcal{B}_X) dans (Y, \mathcal{B}_Y) .

En effet, d'après le critère de mesurabilité, il suffit de tester les images inverses des ensembles de la classe génératrice pour \mathcal{B}_Y formée par les ouverts V de Y ; mais comme f est continue, les ensembles $f^{-1}(V)$ sont des ouverts de X , donc des boréliens de X .

Tribu borélienne trace (ou induite) sur $Y \subset X$

Si Y est un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d) , on peut considérer Y comme un espace métrique, définir sa topologie et sa tribu borélienne \mathcal{B}_Y . Il faut rappeler qu'un sous-ensemble V de Y est un ouvert de Y si et seulement s'il existe un ouvert V_1 de X tel que $V = V_1 \cap Y$ (propriété de la topologie induite).

Proposition. *La tribu borélienne \mathcal{B}_Y de la partie Y de X est égale à*

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}_X\}.$$

De plus, si Y est un borélien de X , on peut dire que \mathcal{B}_Y est la famille des boréliens de X qui sont contenus dans Y .

Preuve. — On introduit l'injection continue $i : Y \rightarrow X$, qui est mesurable d'après la remarque précédente, donc $B \cap Y = i^{-1}(B)$ est un borélien de Y , pour tout borélien $B \in \mathcal{B}_X$, donc

$$i^{-1}(\mathcal{B}_X) = \{i^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_X\} = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}_X\}$$

est contenue dans \mathcal{B}_Y . Pour l'autre côté, on constate que $i^{-1}(\mathcal{B}_X)$ est une tribu de parties de Y , elle contient les ouverts de Y , donc toute la tribu borélienne de Y .

Remarque. Le résultat précédent est évident si on utilise la remarque 1 : l'image inverse par l'injection $i : Y \rightarrow X$ de la classe $\mathcal{C} = \mathcal{O}_X$ des ouverts de X est la classe \mathcal{O}_Y des ouverts de Y , donc l'image inverse de la tribu borélienne \mathcal{B}_X de X est la tribu engendrée par les images inverses des générateurs de \mathcal{B}_X , à savoir, la tribu borélienne de Y .

Exemples : \mathbb{R} dans $\overline{\mathbb{R}}$, $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Les ensembles \mathbb{R} (ouvert) et $[a, b]$ (fermé) sont des boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$; les boréliens de \mathbb{R} sont les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ contenus dans \mathbb{R} ; les boréliens de $[a, b]$ sont les bordéliens de \mathbb{R} contenus dans $[a, b]$. On voit qu'un borélien général de $\overline{\mathbb{R}}$ est obtenu en ajoutant à un borélien de \mathbb{R} un des quatre sous-ensembles de $\{-\infty, +\infty\}$.

Conséquence. Si une application f de (X, \mathcal{F}) dans un espace métrique Y prend ses valeurs dans un sous-ensemble $Z \subset Y$, elle est mesurable à valeurs dans (Y, \mathcal{B}_Y) si et seulement si elle est mesurable à valeurs dans (Z, \mathcal{B}_Z) .

Proposition. *La tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les ensembles $]c, +\infty]$, où c varie dans \mathbb{R} .*

Il en résulte qu'une application $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ est mesurable dès que

$$f^{-1}(]c, +\infty]) = \{f > c\} \in \mathcal{F}$$

pour tout c réel : c'est la définition qu'on avait prise pour les *fonctions \mathcal{F} -mesurables* à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On peut donc être rassuré : on parle bien de la même chose.

Preuve. — Soit \mathcal{T} la tribu engendrée par tous les ensembles $]c, +\infty]$, où c varie dans \mathbb{R} ; alors \mathcal{T} contient les complémentaires $[-\infty, c]$, et par réunion dénombrable, contient tous les $[-\infty, d[$ car

$$[-\infty, d[= \bigcup_{n=0}^{+\infty} [-\infty, d - 2^{-n}] \in \mathcal{T}.$$

Par intersection des deux types précédents, on voit donc que la tribu \mathcal{T} contient tous les intervalles ouverts bornés $]c, d[$.

Considérons la famille D de tous les *intervalles rationnels*, c'est-à-dire tous les intervalles $]q_1, q_2[$ où $q_1 < q_2$ sont deux rationnels ; cet ensemble D est dénombrable. Soit V un ouvert de \mathbb{R} ; l'ensemble $E_V \subset D$ des intervalles rationnels $I =]q_1, q_2[\in D$ tels que I soit contenu dans V est dénombrable aussi, donc la réunion (dénombrable) de ces intervalles,

$$W = \bigcup_{I \in E_V} I \subset V$$

est dans la tribu \mathcal{T} ; mais cette réunion est égale à V : si x est un point de l'ouvert V , il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V ;$$

comme les rationnels sont denses dans \mathbb{R} , il existe deux rationnels q_1 et q_2 tels que

$$x - \varepsilon < q_1 < x < q_2 < x + \varepsilon ;$$

l'intervalle $I_0 =]q_1, q_2[\subset]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset V$ est donc un élément de E_V , par conséquent I_0 est une partie de la réunion W et

$$x \in I_0 \subset W ;$$

on a ainsi montré que tous les points de V sont dans W , donc $W = V$.

Ainsi, l'ouvert V de \mathbb{R} , quelconque, est dans \mathcal{T} : la tribu \mathcal{T} contient tous les ouverts de \mathbb{R} . De plus, les singletons $\{+\infty\}$ et $\{-\infty\}$ sont dans \mathcal{T} , car

$$\{+\infty\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty}]n, +\infty],$$

et de même pour $-\infty$; si V_1 est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$, sa trace $V = V_1 \cap \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R} , donc V est dans la tribu \mathcal{T} , et V_1 ne diffère de V que par un sous-ensemble de l'ensemble à deux points $\{-\infty, +\infty\}$, qui est dans \mathcal{T} : on déduit que \mathcal{T} contient tous les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$, donc contient la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui achève la preuve.

Remarque. La tribu borélienne de \mathbb{R} est engendrée par les ensembles $]c, +\infty[$, où c varie dans \mathbb{R} . Pour engendrer la tribu borélienne, on pourrait se limiter aux valeurs de c dans un sous-ensemble dénombrable dense dans \mathbb{R} , par exemple tous les c rationnels.

Tribu produit

Si (X_1, \mathcal{F}_1) et (X_2, \mathcal{F}_2) sont deux espaces mesurables, on définit sur le produit $X_1 \times X_2$ la *tribu produit*, notée $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, qui est engendrée par les *pavés mesurables* $A_1 \times A_2$, où le sous-ensemble A_1 de X_1 varie dans \mathcal{F}_1 et $A_2 \subset X_2$ varie dans \mathcal{F}_2 .

On peut étendre la définition à des produits plus longs, et démontrer une propriété d'associativité :

$$(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \otimes (\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3)$$

qui est aussi la tribu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3$ définie en un seul coup comme tribu de parties de $X_1 \times X_2 \times X_3$ engendrée par les pavés mesurables $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Donnons sans trop insister des éléments pour prouver cette associativité ; considérons d'une part des ensembles B de $X_1 \times X_2$, et considérons un produit de la forme $B \times A_3$ comme un sous-ensemble de $X_1 \times X_2 \times X_3$. Alors la tribu $(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3$ est engendrée par les produits $B \times A_3$, où B décrit $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ et A_3 décrit \mathcal{F}_3 ; il est clair que cette famille contient tous les pavés mesurables $A_1 \times A_2 \times A_3$, donc

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3 \subset (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{F}_3 ;$$

pour montrer l'autre inclusion, il faut remarquer que la classe

$$\mathcal{D} = \{B \subset X_1 \times X_2 : B \times A_3 \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_3\}$$

est une tribu de parties de $X_1 \times X_2$ qui contient les pavés $A_1 \times A_2$.

Mesurabilité d'un couple

Si on considère deux applications $f_1 : X \rightarrow Y_1$, $f_2 : X \rightarrow Y_2$ définies sur le même X , on peut introduire l'application *couple* (f_1, f_2) de X dans le produit $Y_1 \times Y_2$, définie par

$$(f_1, f_2) : x \in X \rightarrow (f_1(x), f_2(x)) \in Y_1 \times Y_2.$$

Lemme. *Si deux applications $f_1 : X \rightarrow Y_1$ et $f_2 : X \rightarrow Y_2$ sont données, le couple (f_1, f_2) est mesurable de (X, \mathcal{F}) dans $(Y_1 \times Y_2, \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)$ si et seulement si f_1 est mesurable de (X, \mathcal{F}) dans (Y_1, \mathcal{G}_1) et f_2 de (X, \mathcal{F}) dans (Y_2, \mathcal{G}_2) .*

Preuve. — Supposons d'abord f_1 et f_2 mesurables ; l'image inverse par le couple (f_1, f_2) d'un pavé mesurable $B_1 \times B_2$ est l'intersection $\{f_1 \in B_1\} \cap \{f_2 \in B_2\}$, qui est dans \mathcal{F} quand $B_1 \in \mathcal{G}_1$, $B_2 \in \mathcal{G}_2$; cela étant vrai pour tout générateur de la tribu produit $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$, on en déduit que le couple (f_1, f_2) est mesurable par le critère de mesurabilité.

Inversement, si le couple est mesurable, on note que

$$\{f_1 \in B_1\} = \{(f_1, f_2) \in B_1 \times Y_2\} \in \mathcal{F},$$

donc f_1 est mesurable, et de même pour f_2 .

Tribu borélienne de \mathbb{R}^d

Proposition. La tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ de \mathbb{R}^d est égale à la tribu produit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ des tribus boréliennes.

Preuve. — On va se limiter à démontrer le cas $d = 2$. On commence par démontrer une inclusion qui est vraie en général,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}.$$

La vérification de cette inclusion se fait en deux étapes ; on introduit d'abord, pour tout ouvert V de \mathbb{R} , la classe

$$\mathcal{D}_V = \{A \subset \mathbb{R} : A \times V \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\};$$

c'est une tribu de parties de \mathbb{R} qui contient les ouverts U , donc \mathcal{D}_V contient tous les boréliens de \mathbb{R} ; dans un deuxième temps, on fixe un borélien A de \mathbb{R} et on pose

$$\mathcal{D}^A = \{B \subset \mathbb{R} : A \times B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\};$$

à nouveau, c'est une tribu, et elle contient les ouverts V d'après le premier pas, donc \mathcal{D}^A contient tous les boréliens B . On a ainsi montré que tous les pavés $A \times B$ sont dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, donc la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ contient la tribu produit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ engendrée par ces pavés.

Indiquons pourquoi \mathcal{D}_V est une tribu (le raisonnement pour \mathcal{D}^A est le même) ; tout d'abord, si U est un ouvert de \mathbb{R} , alors $U \times V$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 , donc un borélien de \mathbb{R}^2 et il en résulte que $U \in \mathcal{D}_V$. La classe \mathcal{D}_V contient tous les ouverts, en particulier elle contient \mathbb{R} , première condition pour une tribu ; si A est dans \mathcal{D}_V , son complémentaire A^c dans \mathbb{R} est aussi dans \mathcal{D}_V , car $A^c \times V = (\mathbb{R} \times V) \setminus (A \times V)$ est borélien dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ d'après ce qui précède ; enfin, l'égalité

$$\left(\bigcup_n A_n\right) \times V = \bigcup_n A_n \times V$$

montre que \mathcal{D}_V est stable par union dénombrable.

Pour l'autre inclusion, il suffit de prouver le lemme qui suit ; il en résultera que la tribu produit contient tous les ouverts de \mathbb{R}^2 , donc $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ce qui terminera la preuve de la proposition.

Lemme. Tout ouvert de \mathbb{R}^d est réunion dénombrable de pavés ouverts.

Preuve. — On se limitera encore à $d = 2$. Considérons la famille dénombrable D de tous les rectangles ouverts rationnels, c'est-à-dire les produits d'intervalles ouverts rationnels,

$$Q =]q_1, q_2[\times]r_1, r_2[,$$

où $q_1 < q_2$, $r_1 < r_2$ sont rationnels. Soit V un ouvert de \mathbb{R}^2 et soit E_V la famille, encore dénombrable, des rectangles $Q \in D$ qui sont contenus dans V ; on va montrer que l'ouvert V est la réunion de tous les rectangles rationnels qu'il contient,

$$V = \bigcup_{Q \in E_V} Q.$$

Si $(x, y) \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ soit contenu dans V ; par la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , il existe q_1, q_2, r_1, r_2 rationnels tels que

$$x - \varepsilon < q_1 < x < q_2 < x + \varepsilon, \quad y - \varepsilon < r_1 < y < r_2 < y + \varepsilon,$$

donc $Q =]q_1, q_2[\times]r_1, r_2[$ est un élément de E_V qui contient (x, y) : tout point de V est contenu dans un rectangle rationnel contenu dans V , ce qui termine la preuve.

Conséquence : fonctions mesurables à valeurs dans \mathbb{C} . Considérons que, du point de vue métrique et topologique, \mathbb{C} est identifié à \mathbb{R}^2 ; la tribu borélienne de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ est égale à la tribu produit, donc f est mesurable de (X, \mathcal{F}) dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ si et seulement si le couple $(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$ est mesurable à valeurs dans la tribu produit, ce qui est vrai si et seulement si les deux composantes sont des fonctions \mathcal{F} -mesurables réelles. C'était la définition provisoire qu'on avait adoptée, et qui rejoint maintenant le point de vue général des applications mesurables.

Fonction borélienne de fonctions mesurables

Proposition. Si f_1, \dots, f_d sont des fonctions \mathcal{F} -mesurables réelles sur X , si φ est une fonction borélienne de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , alors

$$x \in X \rightarrow \varphi(f_1(x), \dots, f_d(x))$$

est une fonction \mathcal{F} -mesurable.

Preuve. — On va tirer profit de l'égalité de tribus sur \mathbb{R}^d ; l'application

$$x \in X \rightarrow (f_1(x), \dots, f_d(x)) \in \mathbb{R}^d$$

est mesurable à valeurs dans la tribu produit $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; par hypothèse, φ est mesurable de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$ dans \mathbb{R} , et l'égalité de tribus permet de composer les deux applications mesurables pour obtenir le résultat voulu.

Remarque. Dans ce qui précède, on avait seulement besoin pour la composition de savoir que la tribu produit est plus grande que la tribu borélienne ; c'est la partie qu'on a traitée en second (avec des considérations spécifiques de dénombrabilité).