cours 11, le jeudi 4 mars 2010

Parenthèse : topologie de $\overline{\mathbb{R}}$

Pour définir la topologie de l'ordre sur un ensemble totalement ordonné infini X, on considère les ensembles

$$\{x \in \mathrm{X} : x_0 < x\}, \quad \{x \in \mathrm{X} : x < y_0\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathrm{X} : x_0 < x < y_0\},$$

où x_0, y_0 varient dans X ; un ensemble V est *ouvert dans* X si pour tout point x de V, il existe un ensemble I d'une des trois formes précédentes tel que $x \in \mathrm{I} \subset \mathrm{V}$.

Si Y est un sous-ensemble de X, il est ordonné par l'ordre induit, et la topologie de l'ordre sur Y est la topologie induite par la topologie de l'ordre sur X.

Dans le cas de $\overline{\mathbb{R}}$, les ensembles « de base » sont de la forme $[-\infty, b[$, $]a, +\infty]$ et les intersections $]a, b[$ des deux premiers types. La topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ induit sur $\mathbb{R}$ la topologie usuelle.

III.1.2. *Mesure et topologie*

Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X ; on définit la distance d'un point $x \in \mathrm{X}$ à l'ensemble A par

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf\{d(x, a) : a \in \mathrm{A}\}.$$

La fonction $x \in \mathrm{X} \to d(x, \mathrm{A})$, « distance à la partie A », est lipschitzienne, donc en particulier continue. En effet, pour tous $x, y \in \mathrm{X}$ et $a \in \mathrm{A}$ on a $d(x, \mathrm{A}) \le d(x, a) \le d(x, y) + d(y, a)$. En prenant l'inf en a on obtient $d(x, \mathrm{A}) \le d(x, y) + d(y, \mathrm{A})$ et en inversant les rôles de x et y on obtient que

$$\forall x, y \in \mathrm{X}, \quad \bigl|d(x, \mathrm{A}) - d(y, \mathrm{A})\bigr| \le d(x, y).$$

Si x est un point d'un ouvert V, on note que la distance de x au fermé complémentaire V^c est > 0 : en effet, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{V}$: tous les points à distance $< r$ de x sont dans V, donc $d(x, \mathrm{V}^c) \ge r > 0$. Autrement dit, si F est fermé, la condition $d(x, \mathrm{F}) = 0$ équivaut à $x \in \mathrm{F}$.

Dans un espace métrique, tout ouvert V est réunion d'une suite croissante de fermés, par exemple en posant pour tout $n \ge 0$

$$\mathrm{F}_n = \{x \in \mathrm{X} : d(x, \mathrm{V}^c) \ge 2^{-n}\}.$$

Ces ensembles sont croissants, fermés par la continuité de la fonction distance à V^c, contenus dans V (si la distance de x à V^c est $\ge 2^{-n} > 0$, le point x n'est pas dans V^c, il est dans V), et pour tout point x de V on a $d(x, \mathrm{V}^c) > 0$, donc il existe un entier n tel qu'on ait $2^{-n} \le d(x, \mathrm{V}^c)$ et alors x est dans F_n.

Remarque. On a $d(x, \mathrm{A}) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

Approximation des boréliens par des ouverts (et des fermés)

Lemme : approximation fermé-ouvert. *On suppose donnée une mesure finie* ν *sur la tribu borélienne* $\mathcal{B}_{\mathrm{X}}$ *d'un espace métrique* (X, d)*. Pour tout borélien* B *de* X *et pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un fermé* F_ε *et un ouvert* U_ε *de* X *tels que*

$$\mathrm{F}_\varepsilon \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{U}_\varepsilon, \quad \text{et} \quad \nu(\mathrm{U}_\varepsilon \setminus \mathrm{F}_\varepsilon) = \nu(\mathrm{U}_\varepsilon) - \nu(\mathrm{F}_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Preuve. — On considère la classe $\mathcal{D}$ de toutes les parties B de X qui admettent l'approximation de l'énoncé : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F fermé, U ouvert (oublions l'indice ε !) tels que

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{U}, \quad \nu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

On montre d'abord que la classe $\mathcal{D}$ contient tous les ouverts de X ; on a dit que tout ouvert U de X est réunion d'une suite croissante de fermés (F_n). Par la monotonie de la mesure,

$$\nu(\mathrm{F}_n) \to \nu(\mathrm{U}) < +\infty\,;$$

si $\varepsilon > 0$ est donné, on aura pour U, pour n assez grand, l'encadrement fermé-ouvert

$$\mathrm{F}_n \subset \mathrm{U} \subset \mathrm{U}, \quad \text{et} \quad \nu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{F}_n) < \varepsilon,$$

donc U appartient à la classe $\mathcal{D}$. Puisque $\mathcal{D}$ contient les ouverts, elle contient X et $\emptyset$; la classe $\mathcal{D}$ est stable par passage au complémentaire : si $\mathrm{B} \in \mathcal{D}$ est approché à ε près par $\mathrm{F} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{U}$, son complémentaire B^c est approché par

$$\mathrm{U}^c \subset \mathrm{B}^c \subset \mathrm{F}^c,$$

et la différence $\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{U}^c$ est la même que $\mathrm{U} \setminus \mathrm{F}$, donc l'approximation en mesure reste vraie,

$$\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{U}^c = \mathrm{F}^c \cap \mathrm{U} = \mathrm{U} \setminus \mathrm{F}, \quad \nu(\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{U}^c) = \nu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

La classe $\mathcal{D}$ est stable par union dénombrable : soit $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $\mathcal{D}$, de réunion $\mathrm{B} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n$; pour tout entier $n \geq 0$, on peut trouver par définition de $\mathcal{D}$ un encadrement

$$\mathrm{F}_n \subset \mathrm{B}_n \subset \mathrm{U}_n,$$

avec $\nu(\mathrm{U}_n \setminus \mathrm{F}_n) < \varepsilon\, 2^{-n-2}$; en posant $\mathrm{Y} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n$, $\mathrm{U} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{U}_n$, on trouve l'encadrement

$$\mathrm{Y} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{U},$$

et on constate que

$$(*) \qquad \mathrm{U} \setminus \mathrm{Y} \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{U}_n - \mathrm{F}_n),$$

dont la mesure est $< \varepsilon/2$ par sous-additivité dénombrable,

$$\nu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{Y}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{U}_n - \mathrm{F}_n) < \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon\, 2^{-n-2} = \varepsilon/2\,;$$

vérifions l'inclusion $(*)$: si un point x est dans $\mathrm{U} \setminus \mathrm{Y}$, il est dans U, donc il existe n_0 tel que $x \in \mathrm{U}_{n_0}$; mais x n'est pas dans Y, donc x n'est dans aucun F_n, en particulier pas dans F_{n_0} ; ainsi, x est dans $\mathrm{U}_{n_0} \setminus \mathrm{F}_{n_0}$, donc x est dans la réunion infinie des différences.

Mais Y n'est pas fermé : il faut procéder à une deuxième approximation ; si on considère les fermés croissants

$$\mathrm{Y}_n = \mathrm{F}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{F}_n,$$

on voit que $\mathrm{Y}_n \nearrow \mathrm{Y}$ et par monotonie de la mesure finie ν, on peut trouver n_0 tel que

$$\nu(\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Y}_{n_0}) < \varepsilon/2,$$

et finalement on a l'encadrement

$$\mathrm{Y}_{n_0} \subset \mathrm{Y} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{U},$$

avec $\nu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{Y}_{n_0}) = \nu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{Y}) + \nu(\mathrm{Y} \setminus \mathrm{Y}_{n_0}) < \varepsilon$. On a montré que la réunion dénombrable B est dans $\mathcal{D}$, ce qui termine la preuve du fait que $\mathcal{D}$ est une tribu.

Comme la tribu $\mathcal{D}$ contient les ouverts, elle contient tous les boréliens : ainsi, tous les boréliens B de X possèdent la propriété d'approximation, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Les ensembles F_σ et G_δ suffisent pour calculer la mesure pour ν d'un ensemble borélien B quelconque : il existe C, un ensemble G_δ (intersection dénombrable d'ouverts) et A, un ensemble F_σ (réunion dénombrable de fermés) tels que

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{C}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{B}) = \nu(\mathrm{C}).$$

Expliquons le côté F_σ, le côté G_δ s'obtient en passant au complémentaire. Pour tout n, on peut trouver un fermé $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{B}$ tel que $\nu(\mathrm{F}_n) > \nu(\mathrm{B}) - 2^{-n}$; la réunion $\mathrm{A} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n$ est un F_σ tel que $\nu(\mathrm{A}) \geq \nu(\mathrm{B})$ et $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, d'où le résultat.

On peut définir les ensembles ν-négligeables avec des ouverts : si N est un borélien de mesure nulle, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ouvert V contenant N et tel que $\nu(\mathrm{V}) < \varepsilon$. On voit donc qu'un sous-ensemble $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ est ν-négligeable si et seulement s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ouvert V contenant Y et tel que $\nu(\mathrm{V}) < \varepsilon$.

Les ensembles fermés $\mathrm{F} \subset \mathrm{B}$ qui donnent l'approximation sont souvent des ensembles compliqués, du type ensemble de Cantor, qui sont des fermés ne contenant aucun intervalle ouvert non vide (c'est-à-dire que ce sont des fermés d'intérieur vide), dont la mesure ne correspond pas à l'intuition usuelle de « taille d'un ensemble », qu'on obtient en additionnant des longueurs d'intervalles (l'idée de base de la « mesure de Riemann »). En réalité, la mesure de ces ensembles se comprend difficilement autrement qu'en regardant leur complémentaire, un ouvert dont les composantes sont des intervalles. Par exemple, on peut considérer un ouvert V obtenu en prenant la réunion d'intervalles de longueur $\varepsilon 2^{-n}$ placés autour des rationnels de $[0, 1]$, énumérés sous la forme $(r_n)_{n \geqslant 0}$,

$$\mathrm{V} = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]r_n - \varepsilon 2^{-n-1}, r_n + \varepsilon 2^{-n-1}[\, ;$$

l'ouvert V est de mesure $\leq 2\varepsilon$, et son complémentaire $\mathrm{F} = [0, 1] \setminus \mathrm{V}$ dans $[0, 1]$ est un exemple typique de tel fermé.

Densité des fonctions continues

Proposition. *Soient* (X, d) *un espace métrique,* μ *une mesure sur la tribu borélienne* $\mathcal{B}_{\mathrm{X}}$ *de* X*, et* B *un borélien de* X *contenu dans un ouvert* W *de mesure finie ; pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe une fonction continue* φ *sur* X*, nulle en dehors de* W*, telle que*

$$0 \le \varphi \le 1, \quad \int_{\mathrm{X}} |\varphi - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Preuve. — On aura besoin du lemme d'Urysohn qui suit. Ce lemme étant admis, considérons la mesure finie ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ définie par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{W}).$$

Soit B un borélien de X contenu dans W ; d'après le lemme précédent, on peut encadrer B,

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{V},$$

de façon que $\nu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$, et on peut supposer $\mathrm{V} \subset \mathrm{W}$ (sinon, on remplace l'ouvert V par l'ouvert $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ qui donne un meilleur encadrement). On note que $\mathrm{V} \setminus \mathrm{F} \subset \mathrm{W}$, donc $\mathrm{V} \setminus \mathrm{F} = (\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) \cap \mathrm{W}$ et

$$\mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) = \mu\big((\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) \cap \mathrm{W}\big) = \nu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Comme $\mathrm{F} \subset \mathrm{V}$, les fermés F et V^c sont disjoints. D'après le lemme d'Urysohn, il existe une fonction continue φ sur X telle que $\varphi = 0$ sur le fermé V^c, $\varphi = 1$ sur F et $0 \le \varphi \le 1$ sur X ; on en déduit que

$$\mathbf{1}_{\mathrm{F}} \le \varphi \le \mathbf{1}_{\mathrm{V}},$$

et comme $\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$ admet le même encadrement $\mathbf{1}_{\mathrm{F}} \le \mathbf{1}_{\mathrm{B}} \le \mathbf{1}_{\mathrm{V}}$, on a

$$|\varphi - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}| \le \mathbf{1}_{\mathrm{V}} - \mathbf{1}_{\mathrm{F}} = \mathbf{1}_{\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}},$$

ce qui permet de conclure,

$$\int_{\mathrm{X}} |\varphi - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}| \, \mathrm{d}\mu \le \int_{\mathrm{X}} \mathbf{1}_{\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}} \, \mathrm{d}\mu = \mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Lemme d'Urysohn métrique. *Si* F_0 *et* F_1 *sont deux fermés disjoints dans un espace métrique* (X, d)*, il existe une fonction continue* f *sur* X*, à valeurs dans* $[0, 1]$*, telle que* $f = 0$ *sur* F_0 *et* $f = 1$ *sur* F_1.

Preuve. — Si F_0 et F_1 sont non vides, on posera

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad f(x) = \frac{d(x, \mathrm{F}_0)}{d(x, \mathrm{F}_0) + d(x, \mathrm{F}_1)}.$$

Il faut vérifier que le dénominateur ne s'annule pas : si $d(x, \mathrm{F}_0) = 0$, alors $x \in \mathrm{F}_0$ puisque F_0 est fermé, donc $x \notin \mathrm{F}_1$ puisque les deux ensembles sont disjoints, et alors $d(x, \mathrm{F}_1) > 0$. La fonction f est donc continue, et vérifie les conditions voulues.

Si F_0 est vide, on peut poser $f = 1$ partout et si F_1 est vide $f = 0$ partout.

Remarque. Le lemme d'Urysohn reste vrai pour certains espaces topologiques généraux, par exemple pour un espace topologique compact K quelconque. Le problème dans ce cas est qu'aucune fonction réelle continue sur K n'est donnée *a priori*, et la preuve est beaucoup plus délicate.

Dans un espace topologique X où le lemme d'Urysohn est vrai, on voit que deux fermés disjoints F_0 et F_1 pourront être séparés par deux ouverts disjoints, à savoir $\mathrm{U}_0 = \{f < 1/2\}$ et $\mathrm{U}_1 = \{f > 1/2\}$: le *vrai* lemme d'Urysohn consiste à montrer qu'inversement, cette propriété de séparation des fermés disjoints permet de construire une fonction f continue sur X.

Théorème. *Toute fonction f réelle ou complexe Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ peut être approchée au sens suivant par des fonctions continues : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue φ sur $\mathbb{R}$, à support compact, telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)| \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Un peu plus loin dans le cours, on traduira cet énoncé en disant que l'espace des fonctions continues à support compact est dense dans l'espace normé $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$; on aura aussi densité dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ pour les mêmes raisons.

Preuve. — Elle procède en de multiples pas de réduction, nombreux mais faciles, depuis les fonctions intégrables générales jusqu'aux fonctions indicatrices de boréliens bornés.

Si f est à valeurs complexes, il suffit de faire l'approximation pour les parties réelle et imaginaire séparément : si $\operatorname{Re} f$ est approchée par φ_{R} et $\operatorname{Im} f$ par φ_{I}, alors $\varphi = \varphi_{\mathrm{R}} + \mathrm{i}\varphi_{\mathrm{I}}$ est continue à support compact et

$$\int_{\mathbb{R}} |f - \varphi| \, \mathrm{d}\lambda \le \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Re} f - \varphi_{\mathrm{R}}| \, \mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbb{R}} |\operatorname{Im} f - \varphi_{\mathrm{I}}| \, \mathrm{d}\lambda \,;$$

si f est réelle il suffit de faire l'approximation pour les fonctions positives f^+ et f^- ; supposant maintenant $f \ge 0$ intégrable, on fera l'approximation en deux coups : si f est approchée par g, de façon que $\int_{\mathbb{R}} |f - g| \, \mathrm{d}\lambda < \varepsilon/2$, et si g vérifie la propriété de l'énoncé, on trouvera une fonction φ continue telle que $\int_{\mathbb{R}} |g - \varphi| \, \mathrm{d}\lambda < \varepsilon/2$, d'où le résultat pour f par l'inégalité triangulaire.

Si f est positive elle est limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives intégrables (ψ_n), et $\int_{\mathbb{R}} \psi_n \, \mathrm{d}\lambda$ tend vers $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\lambda$, ce qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}} |f - \psi_n| \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} (f - \psi_n) \, \mathrm{d}\lambda \to 0,$$

donc f est approchée par ψ_n, et il suffit de s'occuper des fonctions étagées intégrables.

Soit ψ une fonction $\mathcal{B}$-étagée intégrable, qu'on peut représenter comme

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} b_i \mathbf{1}_{\mathrm{B}_i},$$

où $b_i \neq 0$ et $\mathrm{B}_i \in \mathcal{B}$, $\lambda(\mathrm{B}_i) < +\infty$ pour chaque i ; si on peut approcher à $\varepsilon > 0$ près chaque fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathrm{B}_i}$ par une φ_i continue à support compact, on aura par l'inégalité triangulaire

$$\int_{\mathbb{R}} \Bigl| \sum_{i=1}^{m} b_i \mathbf{1}_{\mathrm{B}_i} - \sum_{i=1}^{m} b_i \varphi_i \Bigr| \, \mathrm{d}\lambda \le \sum_{i=1}^{m} |b_i| \int_{\mathbb{R}} \bigl| \mathbf{1}_{\mathrm{B}_i} - \varphi_i \bigr| \, \mathrm{d}\lambda \le \varepsilon \Bigl(\sum_{i=1}^{m} |b_i| \Bigr),$$

qui peut être rendu aussi petit qu'on veut ; il suffit donc d'approcher $\mathbf{1}_{\mathrm{B}}$, où B est un borélien de mesure finie. Comme

$$\mathrm{B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{B} \cap [-n, n] \quad \text{et que} \quad \int_{\mathbb{R}} \bigl| \mathbf{1}_{\mathrm{B}} - \mathbf{1}_{\mathrm{B} \cap [-n,n]} \bigr| \, \mathrm{d}\lambda$$

tend vers 0 (convergence dominée, ou monotonie dominée) il suffit de le faire pour un borélien borné B, contenu dans l'ouvert de mesure de Lebesgue finie $W =]-a, a[$ pour a assez grand. D'après la proposition précédente, ça marche.

Remarque. L'énoncé (et la preuve) du théorème précédent marche(nt) aussi pour toute mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui donne une mesure finie aux parties bornées de $\mathbb{R}$.

Remarque. Si A est un borélien de $\mathbb{R}$ et μ une mesure sur $\mathbb{R}$ qui donne une mesure finie aux parties bornées de $\mathbb{R}$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un ouvert V tel que $\mu(V \setminus A) < \varepsilon$, mais on ne peut pas écrire cette approximation comme différence des deux mesures $\mu(V)$ et $\mu(A)$, qui peuvent être toutes les deux infinies. Pour trouver V, on applique le résultat des mesures finies à chaque $A_n = A \cap]-n, n[$, $n \geq 0$, qu'on approche par un ouvert $V_n \subset]-n, n[$ tel que $A_n \subset V_n$ et $\mu(V_n) - \mu(A_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$, et on considère l'ouvert $V = \bigcup_n V_n$.

En appliquant le résultat précédent au borélien complémentaire A^c, on voit qu'on peut trouver un encadrement $F \subset A \subset V$ tel que $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$.

Pour une telle mesure μ, et en particulier pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$, on peut définir les ensembles négligeables comme ceux qui sont contenus dans des ouverts de mesure arbitrairement petite.

III.2. Classe monotone, unicité de mesures

III.2.1. *Théorème de la classe monotone*

Définitions. Un *π-système* de parties de X est une classe $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ qui admet X pour élément et qui est stable par intersection finie.

Un *λ-système* $\mathcal{L}$ de parties de X contient $\emptyset$ comme élément, est stable par union dénombrable croissante et *différence propre*, c'est-à-dire que :

– la classe $\mathcal{L}$ admet $\emptyset$ pour élément ;
– si $(B_n) \subset \mathcal{L}$ est une suite *croissante* d'éléments de $\mathcal{L}$, la réunion $\bigcup_n B_n$ est dans $\mathcal{L}$;
– si A et B sont deux éléments de $\mathcal{L}$ et si $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{L}$.

Une *classe monotone* $\mathcal{M}$ de parties de X est stable par union dénombrable croissante et intersection dénombrable décroissante.

Si un λ-système $\mathcal{L}$ de parties de X contient X, il est stable par passage au complémentaire, et on a la stabilité par union disjointe : si A, B sont disjoints et éléments de $\mathcal{L}$, alors $A \cup B$ est dans $\mathcal{L}$; en effet, le complémentaire A^c est dans $\mathcal{L}$, contient B, donc $\mathcal{L}$ contient la différence propre $A^c \setminus B = A^c \cap B^c$, et $\mathcal{L}$ contient le complémentaire $A \cup B$.

Exemple. Si on a deux mesures μ et ν sur $(X, \mathcal{F})$, l'ensemble des $A \in \mathcal{F}$ tels que $\mu(A) = \nu(A) < +\infty$,

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = \nu(A) < +\infty\}$$

est un λ-système de parties de X. Si de plus les deux mesures sont finies et de même masse, $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$, on obtient un λ-système contenant X. Ce cas particulier de l'exemple sera le plus important pour nos applications.

La famille formée de l'ensemble vide et des intervalles fermés bornés $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est stable par intersection finie ; si on adjoint $\mathbb{R}$, la famille devient un π-système de parties de $\mathbb{R}$.

Remarque. *Si un λ-système $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$ contient* X *et est stable par intersection finie, alors c'est une tribu de parties de* X.

Preuve. — On a $\mathrm{X} \in \mathcal{L}$ par hypothèse, et on a dit que $\mathcal{L}$ est stable par complémentaire quand il contient X ; si $\mathcal{L}$ est stable par intersection finie et complémentaire, il est stable par réunion finie. Si $(\mathrm{A}_n) \subset \mathcal{L}$ est une famille dénombrable, on voit que sa réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ s'obtient comme réunion de la suite croissante d'éléments de $\mathcal{L}$ donnée par

$$\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n \in \mathcal{L},$$

et il en résulte que $\mathcal{L}$ est une tribu.

Théorème de la classe monotone. *Si un λ-système $\mathcal{L}$ contient un π-système $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{L}$ contient la tribu $\sigma(\mathcal{P})$ engendrée par $\mathcal{P}$.*

Si une classe monotone $\mathcal{M}$ contient une algèbre $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{M}$ contient la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$.

Preuve. — On va montrer le premier énoncé, celui qui nous sera le plus utile. Désignons par $\mathcal{L}_0$ le plus petit λ-système contenant $\mathcal{P}$; évidemment, $\mathcal{L}_0$ est contenu dans $\mathcal{L}$. Si on montre que $\mathcal{L}_0$ est stable par intersection, ce sera gagné d'après la remarque précédente : la classe $\mathcal{L}_0$ sera une tribu contenant $\mathcal{P}$, donc contenant $\sigma(\mathcal{P})$ et finalement

$$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}.$$

Alors, le λ-système $\mathcal{L}$ contient bien la tribu engendrée par $\mathcal{P}$, comme promis.

La preuve de la stabilité de $\mathcal{L}_0$ par intersection finie se fait en deux temps, comme on a déjà fait une autre fois. Dans un premier temps, on fixe $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$ et on considère

$$\mathcal{D}_{\mathrm{P}} = \{\mathrm{B} \subset \mathrm{X} : \mathrm{B} \cap \mathrm{P} \in \mathcal{L}_0\}.$$

Cette classe contient $\mathcal{P}$ et est un λ-système : on a donc $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathrm{P}}$, pour tout $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$, ce qui nous dit que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathcal{P},\ \forall \mathrm{B} \in \mathcal{L}_0, \quad \mathrm{B} \cap \mathrm{P} \in \mathcal{L}_0.$$

Ensuite, on fixe $\mathrm{B} \in \mathcal{L}_0$ et on pose

$$\mathcal{D}_{\mathrm{B}} = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{X} : \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{L}_0\}.$$

c'est à nouveau un λ-système, et il contient encore $\mathcal{P}$, grâce au premier pas de la preuve ; à nouveau, on conclut que $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{D}_{\mathrm{B}}$, pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{L}_0$, ce qui donne maintenant la stabilité de $\mathcal{L}_0$ par intersection finie, cqfd.

Il reste à expliquer pourquoi $\mathcal{D}_{\mathrm{P}}$ est un λ-système ; si $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B}_2$ sont deux éléments de $\mathcal{D}_{\mathrm{P}}$, l'intersection $(\mathrm{B}_2 \setminus \mathrm{B}_1) \cap \mathrm{P}$ est la différence de $\mathrm{B}_2 \cap \mathrm{P}$ et de son sous-ensemble $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{P}$, deux éléments du λ-système $\mathcal{L}_0$, donc

$$(\mathrm{B}_2 \setminus \mathrm{B}_1) \cap \mathrm{P} = (\mathrm{B}_2 \cap \mathrm{P}) \setminus (\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{P})$$

est dans $\mathcal{L}_0$, et $\mathrm{B}_2 \setminus \mathrm{B}_1$ est dans $\mathcal{D}_{\mathrm{P}}$. La preuve de la stabilité par union dénombrable croissante est analogue ; si (B_n) est une suite croissante dans $\mathcal{D}_{\mathrm{P}}$, les $\mathrm{B}_n \cap \mathrm{P}$ sont dans $\mathcal{L}_0$ et croissants, donc

$$\Bigl(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n\Bigr) \cap \mathrm{P} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{B}_n \cap \mathrm{P}) \in \mathcal{L}_0,$$

et cela montre que la réunion des B_n est dans $\mathcal{D}_{\mathrm{P}}$.