Rappel, approximation par un ouvert : pour tout borélien B de $\mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert V_ε de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(V_\varepsilon \setminus B) < \varepsilon$. Il en résulte qu'on peut définir les ensembles Lebesgue-négligeables sur $\mathbb{R}$ en se servant d'ensembles ouverts : la partie Y de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-négligeable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U qui contient Y et tel que $\lambda(U) < \varepsilon$, ce qui revient à dire qu'il existe une suite $(I_k)_{k \geq 0}$ d'intervalles ouverts dont la réunion contient Y et qui est telle que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(I_k) < \varepsilon.$$

Compléments sur la classe monotone

On va dire quelque mots de la variante du théorème de classe monotone. Cette sous-section (qui n'a pas été traitée en cours) peut être ignorée.

Théorème de la classe monotone. *Variante : si une classe monotone $\mathcal{M}$ contient une algèbre $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{M}$ contient la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$.*

Montrons que la variante entraîne la version « π—λ » qu'on a prouvée. On rappelle qu'une *classe monotone* $\mathcal{M}$ est stable par union dénombrable croissante et intersection dénombrable décroissante. Si un π-système $\mathcal{P}$ est contenu dans un λ-système $\mathcal{L}$, alors on va montrer plus bas que $\mathcal{L}$ contient l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{P}$; de plus le λ-système $\mathcal{L}$, qui admet X pour élément, est stable par complémentaire, donc $\mathcal{L}$ est une classe monotone contenant l'algèbre $\mathcal{A}$. D'après la « variante » ci-dessus, la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$ est contenue dans $\mathcal{M} = \mathcal{L}$. On a ainsi obtenu que le λ-système $\mathcal{L}$ contenant $\mathcal{P}$ contient une tribu qui contient $\mathcal{P}$, donc $\mathcal{L}$ contient aussi $\sigma(\mathcal{P})$: la variante implique l'énoncé qu'on a montré.

Vérifions, comme annoncé, que l'algèbre engendrée par $\mathcal{P}$ est contenue dans $\mathcal{L}$. Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que pour tous $P, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ on a, en posant $Q_j = X \setminus P_j \in \mathcal{L}$,

$$P \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_n \in \mathcal{L}.$$

Le cas $n = 0$ est donné par l'hypothèse $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. On écrit ensuite $P \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_n \cap Q_{n+1}$ sous la forme

$$(P \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_n) \setminus (P \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_n \cap P_{n+1})$$

qui est, d'après l'hypothèse de récurrence au niveau n, une différence propre dans $\mathcal{L}$ (regrouper $P \cap P_{n+1}$ pour former un nouvel élément P' de $\mathcal{P}$). Comme X est élément du π-système $\mathcal{P}$,

$$Q_1 \cap \ldots \cap Q_n = X \cap Q_1 \cap \ldots \cap Q_n \in \mathcal{L}.$$

Puisque $X \in \mathcal{L}$, on sait que $\mathcal{L}$ est stable par complémentaire, et on a vu que cela entraîne que $\mathcal{L}$ est stable par union disjointe. Posons $P_j^{(1)} = P_j$ et $P_j^{(-1)} = Q_j$; les 2^n ensembles

$$P_1^{(\varepsilon_1)} \cap \ldots \cap P_n^{(\varepsilon_n)} \in \mathcal{L}$$

où $\varepsilon_j = \pm 1$ pour chaque j, forment une partition de X, et leurs réunions forment l'algèbre engendrée par $P_1, \ldots, P_n$, qui est donc contenue dans $\mathcal{L}$ car $\mathcal{L}$ est stable par unions disjointes. Comme l'algèbre engendrée par $\mathcal{P}$ est la réunion des algèbres engendrées par les sous-ensembles finis de $\mathcal{P}$, il en résulte qu'elle est contenue dans $\mathcal{L}$.

Remarque. Une version de la preuve qu'on a donnée pour le théorème de classe monotone à la leçon précédente démontre de façon rapide ce qu'on vient de faire : *un λ-système qui contient un π-système contient aussi l'algèbre engendrée par ce π-système.* Il suffit d'oublier dans cette preuve rapide tout ce qui concerne les limites croissantes de suites d'ensembles. Mais la preuve longue a le mérite d'être beaucoup plus explicite.

Pour compléter cette sous-section, on va donner une preuve (qui n'a pas été donnée en cours) de la variante algèbre-classe monotone du lemme, preuve « par l'intérieur » et par Zorn, pour rigoler. À laisser de côté en première lecture, sinon pour toujours.

On donne une algèbre $\mathcal{A}_0$ contenue dans une classe monotone $\mathcal{M}$. On voudrait agrandir $\mathcal{A}_0$ pour arriver à une σ-algèbre contenue dans $\mathcal{M}$. À cette fin, il est nécessaire de résoudre la question suivante : si une suite croissante $(\mathrm{C}_n) \subset \mathcal{A}_0$ est donnée dans l'algèbre, sa réunion $\mathrm{Y} = \bigcup \mathrm{C}_n$ doit être dans la σ-algèbre cherchée, et elle n'est peut-être pas dans $\mathcal{A}_0$: dans ce cas, il faut pouvoir l'adjoindre, pour former une nouvelle algèbre $\mathcal{A}_1$. On remarque que Y est néanmoins dans la classe monotone $\mathcal{M}$.

On cherche donc à former une nouvelle algèbre $\mathcal{A}_1$, engendrée en ajoutant cet ensemble Y de $\mathcal{M}$ à l'algèbre $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M}$; on va montrer que $\mathcal{A}_1$ reste contenue dans $\mathcal{M}$, ce qui sera la base d'un raisonnement de « récurrence zornique » : si on peut justifier par Zorn (et en effet, c'est vrai et facile) l'existence d'une algèbre, maximale pour l'inclusion, contenue dans $\mathcal{M}$ et contenant une algèbre de départ $\mathcal{A}$, ce sera une σ-algèbre, puisque la maximalité serait contredite par la possibilité de construire une algèbre plus grande telle que $\mathcal{A}_1$, au cas où une réunion dénombrable telle que Y ne serait pas encore dans l'algèbre maximale. Ainsi, la variante du théorème de classe monotone sera démontrée, « par l'intérieur », mais à quel prix ! Bien sûr, suivant les goûts pervers de chacun, on pourra remplacer Zorn par une récurrence transfinie.

Montrons que l'algèbre $\mathcal{A}_1$, qui est engendrée par $\mathcal{A}_0$ et Y, reste contenue dans la classe monotone $\mathcal{M}$: on voit que $\mathcal{A}_1$ est formée de tous les ensembles

$$(\mathrm{A} \cap \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{Y}^c), \quad \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}_0.$$

Si Y est limite croissante de la suite $(\mathrm{C}_n) \subset \mathcal{A}_0$, on note que pour tout m,

$$(\mathrm{A} \cap \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}_m^c)$$

est dans la classe monotone $\mathcal{M}$, comme limite croissante en n de la suite des ensembles

$$(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_n) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}_m^c),$$

qui sont dans l'algèbre $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M}$; ensuite on obtient $(\mathrm{A} \cap \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{Y}^c)$ comme limite décroissante en m d'éléments de $\mathcal{M}$, donc on reste dans $\mathcal{M}$. Ainsi,

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{M} \ \Rightarrow \ \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{M}.$$

En trouvant une algèbre maximale par Zorn, on sera arrivé à une σ-algèbre, contenant l'algèbre initiale $\mathcal{A}$ et contenue dans la classe monotone $\mathcal{M}$.

III.2.2. *Résultats d'unicité*

Lemme. *Si deux mesures finies sur* $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$, *de même masse* $\mu(\mathrm{X}) = \nu(\mathrm{X})$, *coïncident sur une classe* $\mathcal{C}$, *stable par intersection et qui engendre la tribu* $\mathcal{F}$, *elles sont égales.*

Preuve. — On considère la classe $\mathcal{P}$ de parties de X formée de X et des éléments de $\mathcal{C}$; c'est un π-système ; comme on a supposé que $\mu(\mathrm{X}) = \nu(\mathrm{X})$, on voit que

$$\mathcal{L} = \{\mathrm{B} \in \mathcal{F} : \mu(\mathrm{B}) = \nu(\mathrm{B})\}$$

est un λ-système qui contient le π-système $\mathcal{P}$, donc par le théorème de classe monotone, la classe $\mathcal{L}$ contient la tribu engendrée par $\mathcal{P}$, qui est égale à $\mathcal{F}$ d'après l'hypothèse. Ainsi, $\mu = \nu$.

Lemme. *On suppose que* μ *et* ν *sont deux mesures sur* $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$, *et on suppose que* $\mathcal{C}$ *est une classe de parties de* X *telle que*

– *la classe* $\mathcal{C}$ *est stable par intersection finie et engendre la tribu* $\mathcal{F}$ *;*
– *pour tout* $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$, *on a* $\mu(\mathrm{C}) = \nu(\mathrm{C}) < +\infty$ *;*
– *il existe une suite croissante* (C_n) *dans* $\mathcal{C}$ *dont la réunion est* X.

Alors les deux mesures sont égales.

Preuve. — Pour tout entier $n \geq 0$ les deux mesures finies μ_n et ν_n sur $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ définies par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{F}, \quad \mu_n(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_n), \quad \nu_n(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_n)$$

sont égales d'après le lemme précédent et pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$, on a $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_n \nearrow \mathrm{A}$ donc par la monotonie des mesures μ et ν,

$$\mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_n) = \lim_n \nu(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}_n) = \nu(\mathrm{A}).$$

Corollaire. *Si deux mesures sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *donnent une même mesure finie à tous les intervalles* $[a, b]$, $a \leq b$, *elles sont égales.*

Preuve. — La classe $\mathcal{C}$ formée des $[a, b]$ et de l'ensemble vide est stable par intersection, engendre la tribu borélienne, et $\mathbb{R}$ est réunion de la suite $[-n, n]$ d'éléments de $\mathcal{C}$.

Corollaire. *Si deux mesures sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *donnent une même mesure finie à tous les intervalles semi-ouverts* $]a, b]$, $a \leq b$, *elles sont égales.*

Preuve. — On peut le déduire du précédent, ou bien refaire la même preuve, cette fois avec la classe $\mathcal{C}$ formée des $]a, b]$.

Corollaire. *Si deux mesures* finies *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *donnent une même mesure finie à tous les intervalles* $]-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$, *elles sont égales.*

Preuve. — Comme les mesures sont supposées finies, on obtient les mesures de tous les ensembles $]a, b]$ par différence.

Corollaire. *La mesure de Lebesgue* λ *sur* $\mathbb{R}$ *est la seule mesure* μ *sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *qui est telle que* $\mu([a, b]) = b - a$ *pour tous* $a < b$.

Remarque. On pourrait prouver ce dernier résultat, ainsi que le premier lemme de la section, « à la main » à partir des résultats d'approximation, sans utiliser le théorème de classe monotone, dans le cas de mesures sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$: en deux coups de monotonie de la mesure μ, supposée finie sur les bornés, on arrive à calculer la mesure pour μ de tous les ensembles G_δ, à partir des mesures des intervalles. Comme tout borélien B est contenu dans un G_δ de même mesure, la mesure μ est complètement déterminée par ses valeurs sur les intervalles.

III.2.3. *Changements de variable sur* $\mathbb{R}$

Mesure image

On donne une application $\mathrm{T} : (\mathrm{X}, \mathcal{F}) \to (\mathrm{Y}, \mathcal{G})$ mesurable, et μ une mesure sur $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$. On définit une mesure ν sur l'espace d'arrivée $(\mathrm{Y}, \mathcal{G})$ en posant

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{G}, \quad \nu(\mathrm{B}) = \mu\big(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B})\big).$$

Comme T^{-1} préserve les opérations ensemblistes, il est clair que ν est une mesure : si $(\mathrm{B}_n)_{n \geqslant 0} \subset \mathcal{G}$ est une suite disjointe, les images inverses $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B}_n)$ sont deux à deux disjointes, leur réunion est l'image inverse de la réunion, donc

$$\nu\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n\Big) = \mu\Big(\mathrm{T}^{-1}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B}_n)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\big(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B}_n)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{B}_n).$$

Cette mesure image est notée $\nu = \mathrm{T}(\mu)$, ou aussi $\mathrm{T}_{\#}\mu$ ou $\mathrm{T}\mu$.

La mesure image peut être très bizarre : si $\mathrm{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application nulle et λ la mesure de Lebesgue, la mesure $\mathrm{T}_{\#}\lambda$ donne la mesure $+\infty$ à tout borélien B qui contient 0, et la mesure 0 sinon.

Intégration par rapport à une mesure image

On considère $\nu = \mathrm{T}\mu$, mesure sur $(\mathrm{Y}, \mathcal{G})$ image par T d'une mesure μ sur $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$.

Lemme. *Pour toute fonction $\mathcal{G}$-mesurable g sur* Y *à valeurs dans* $[0, +\infty]$, *on a*

$$\int_{\mathrm{Y}} g(y) \,\mathrm{d}\nu(y) = \int_{\mathrm{X}} g(\mathrm{T}x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

De plus, si f est mesurable réelle ou complexe, elle est ν-intégrable si et seulement si la composée $f \circ \mathrm{T}$ est μ-intégrable sur X, *et dans ce cas, on a la même formule pour le calcul de l'intégrale,*

$$\int_{\mathrm{Y}} f(y) \,\mathrm{d}\nu(y) = \int_{\mathrm{X}} f(\mathrm{T}x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Preuve. — On commence par $g = \mathbf{1}_{\mathrm{B}}$, avec $\mathrm{B} \in \mathcal{G}$; dans ce cas $x \in \mathrm{X} \to \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(\mathrm{T}x)$ est l'indicatrice de l'image inverse $\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B})$, et l'égalité

$$\int_{\mathrm{Y}} \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(y) \,\mathrm{d}\nu(y) = \nu(\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{B})) = \int_{\mathrm{X}} \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(\mathrm{T}x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

est l'expression de la définition de ν ; on passe aux fonctions $\mathcal{G}$-étagées ≥ 0 par positive-linéarité, puis on réalise g, fonction $\mathcal{G}$-mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$, comme limite croissante d'étagées (φ_n) et on utilise le théorème de convergence monotone appliqué aux deux mesures μ et ν, en notant que $\varphi_n(\mathrm{T}x)$ tend en croissant vers $g(\mathrm{T}x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$,

$$\int_{\mathrm{Y}} g(y) \,\mathrm{d}\nu(y) = \lim_n \int_{\mathrm{Y}} \varphi_n(y) \,\mathrm{d}\nu(y) = \lim_n \int_{\mathrm{X}} \varphi_n(\mathrm{T}x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathrm{X}} g(\mathrm{T}x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Pour l'intégrabilité, on a d'abord que $f \circ \mathrm{T}$ est $\mathcal{F}$-mesurable, et on note que $|f| \circ \mathrm{T}$ est la valeur absolue (ou le module) de $f \circ \mathrm{T}$, $f^+ \circ \mathrm{T}$ la partie positive de $f \circ \mathrm{T}$ dans le cas réel, *etc.* , ce qui ramène tout au cas positif.

Changement de variable linéaire sur $\mathbb{R}$

Proposition. *On considère le changement de variable linéaire $y = ax + b$, où $a \neq 0$; pour toute fonction f borélienne positive sur $\mathbb{R}$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\,|a|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Preuve. — Définissons l'application $\mathrm{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $\mathrm{T}(x) = ax + b$ pour tout x réel ; l'application T est continue, donc borélienne ; considérons la mesure $\mu = |a|\lambda$ sur $\mathbb{R}$; comme le membre de gauche de l'égalité à démontrer s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\,|a|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(\mathrm{T}x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

il s'agit de vérifier que l'image ν de la mesure μ par T coïncide avec λ. Pour cela il suffit de calculer

$$\nu([u,v]) = \mu(\mathrm{T}^{-1}([u,v])) = |a|\lambda(\mathrm{T}^{-1}([u,v])).$$

On a

$$x \in \mathrm{T}^{-1}([u,v]) \;\Leftrightarrow\; (u \le ax+b \le v) \;\Leftrightarrow\; (u-b \le ax \le v-b)\,;$$

si $a > 0$, l'image inverse $\mathrm{T}^{-1}([u,v])$ est $[(u-b)/a, (v-b)/a]$, de longueur $(v-u)/a$, donc

$$\mu\bigl(\mathrm{T}^{-1}([u,v])\bigr) = |a|\,\lambda\bigl(\mathrm{T}^{-1}([u,v])\bigr) = |a|(v-u)/a = v-u\,;$$

si $a < 0$, l'image inverse est $[(b-v)/|a|, (b-u)/|a|]$, de même longueur $(v-u)/|a|$, donc à nouveau $\mu(\mathrm{T}^{-1}([u,v])) = v-u$. L'image étant identifiée, le résultat découle de la formule du calcul d'une intégrale par rapport à une mesure image.