

Rappel. Une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, finie sur tous les boréliens bornés, est complètement caractérisée par la donnée des valeurs $\mu(]a, b])$ que prend la mesure μ sur les intervalles de la forme

$$]a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leq b.$$

On peut caractériser une mesure finie μ sur \mathbb{R} au moyen de la fonction

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow F_{\mu}(x) = \mu(]-\infty, x]);$$

en effet, si la fonction F_{μ} est donnée, on retrouve les mesures des intervalles $]a, b]$,

$$\mu(]a, b]) = F_{\mu}(b) - F_{\mu}(a)$$

pour tous $a \leq b$.

Exemple. La mesure de Dirac δ_c au point $c \in \mathbb{R}$ est définie en posant $\delta_c(B) = 1$ si $c \in B$ et $\delta_c(B) = 0$ si $c \notin B$. La fonction $F = F_{\delta_c}$ correspondante est égale à $F(x) = 0$ pour $x < c$ et $F(x) = 1$ pour tout $x \geq c$. Noter qu'au point de saut, la convention adoptée donne la valeur 1, qui est égale aux valeurs de F aux points plus à droite : la fonction est continue à droite.

Dans le cas d'une mesure infinie, on ne peut pas utiliser des intervalles partant de $-\infty$, dont la mesure peut être infinie et ne permet plus de calculer les $\mu(]a, b])$ par différence ; mais on a supposé que la mesure des bornés est finie pour μ , ce qui permet de poser

$$F_{\mu,0}(x) = \mu(]0, x]) \quad \text{si } x \geq 0, \quad F_{\mu,0}(x) = -\mu(]x, 0]) \quad \text{si } x < 0;$$

notons que $F_{\mu,0}(0) = \mu(]0, 0]) = \mu(\emptyset) = 0$. On a ici encore

$$\mu(]a, b]) = F_{\mu,0}(b) - F_{\mu,0}(a)$$

pour tous $a \leq b$. Vérifions le pour $a \leq 0 \leq b$, par exemple : l'intervalle $]a, b]$ est la réunion disjointe de $]a, 0]$ et de $]0, b]$, donc

$$\mu(]a, b]) = \mu(]a, 0]) + \mu(]0, b]) = -F_{\mu,0}(a) + F_{\mu,0}(b).$$

Si $0 < a \leq b$, l'intervalle $]0, b]$ est la réunion disjointe de $]0, a]$ et de $]a, b]$, donc on a dans ce cas $F(b) = F(a) + \mu(]a, b])$, et le dernier cas restant, $a \leq b < 0$, est analogue.

Exemple. Pour Lebesgue, $F_{\lambda,0}(x) = x$ pour tout réel x .

Quand μ est une mesure finie sur \mathbb{R} , on voit que $F_{\mu,0} = F_{\mu} - F_{\mu}(0)$: les deux fonctions $F_{\mu,0}$ et F_{μ} ne diffèrent que d'une constante, et elles auront donc les mêmes propriétés de croissance, continuité, et le cas échéant, la même dérivée.

Proposition. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, finie sur les bornés ; la fonction $F_{\mu,0}$ est croissante et continue à droite. Si μ est finie, on a le même résultat pour F_μ .

Preuve. — Posons $F = F_{\mu,0}$. La croissance de F est facile à démontrer : si $x \leq y$, l'ensemble $]x, y]$ a une mesure ≥ 0 , et on a dit que

$$F(y) - F(x) = \mu(]x, y]) \geq 0.$$

Montrons la continuité à droite en un point $x \geq 0$, par exemple. Considérons une suite (x_n) qui tend vers x par la droite, ce qui permet de supposer que x_n décroît vers x ; pour tout n , on a $0 \leq x \leq x_n$, donc $F(x_n) = \mu(]0, x_n])$. On voit que la suite d'ensembles $(]0, x_n])$ décroît vers l'ensemble $]0, x]$,

$$]0, x] = \bigcap_n]0, x_n]$$

(si t est dans l'intersection, on a $0 < t \leq x_n$ pour tout n , qui entraîne $0 < t \leq x$ à la limite ; l'autre inclusion est claire) ; on sait que la continuité décroissante de la mesure n'est pas toujours vraie, mais elle est vraie quand l'un des ensembles de la suite décroissante est de mesure finie, ce qui est vrai pour tous les bornés $]0, x_n]$ d'après l'hypothèse sur μ . On a donc bien

$$\mu(]0, x]) = \lim_n \mu(]0, x_n]),$$

c'est-à-dire que $F(x) = \lim_n F(x_n)$. Cela prouve la continuité à droite de F .

On admettra (au niveau de ce cours de L3) le résultat important d'existence suivant, qui complète le résultat facile précédent.

Théorème 1. Pour toute fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante (au sens large) et continue à droite, il existe une mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ telle que

$$\forall a \leq b \in \mathbb{R}, \quad \mu(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

De plus, cette mesure μ est uniquement déterminée par F .

L'existence de la mesure de Lebesgue est un cas particulier d'application de ce théorème, celui où $F(x) = x$. Le cas général admet essentiellement la même preuve que le cas Lebesgue. L'affirmation concernant l'unicité a été prouvée au cours précédent, et rappelée au début de ce cours.

Autres propriétés de la mesure de Lebesgue

Proposition. La mesure de Lebesgue est, à multiple près, la seule mesure sur \mathbb{R} invariante par translation et finie sur les bornés. Autrement dit, la mesure de Lebesgue est la seule mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ invariante par translation telle que $\mu([0, 1]) = 1$.

Preuve. — Supposons que μ est invariante par translation et $\mu([0, 1]) = 1$. Si on donne un entier $n \geq 1$, les intervalles

$$]k/n, (k+1)/n], \quad k = 0, \dots, n-1$$

sont tous de même mesure puisque μ est invariante par translation, et contenus dans $[0, 1]$, donc $\mu(]0, 1/n]) \leq 1/n$. On en déduit que $\mu(]-1/n, 1/n])$ tend vers 0, donc $\mu(\{0\}) = 0$ et $\mu(]0, 1]) = 1$; il en résulte que

$$\mu(]0, 1/n]) = 1/n$$

pour tout entier $n \geq 1$. Si $x > 0$, on écrit $x = k/n + r$, avec $0 \leq r < 1/n$ donc

$$k/n \leq \mu([0, x]) \leq (k + 1)/n$$

et on en déduit $\mu([0, x]) = x$ pour tout $x > 0$; il en résulte que $\mu([a, b]) = b - a$ par translation, pour tous $a \leq b$. Donc μ est la mesure de Lebesgue.

Mesures à densité

On considère un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) . On suppose que g , fonction définie sur X , est \mathcal{F} -mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$; on définit une nouvelle mesure $\nu = g\mu$ sur \mathcal{F} en posant

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \nu(A) = \int_X \mathbf{1}_A g \, d\mu.$$

On montre que ν est une mesure par le théorème des séries de fonctions ≥ 0 (version séries du TCM) : si $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{F}$ est une suite d'ensembles deux à deux disjoints, l'indicatrice de leur réunion $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ est la série des indicatrices, donc

$$\nu(A) = \int_X \mathbf{1}_A g \, d\mu = \int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n} g \right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_X \mathbf{1}_{A_n} g \, d\mu \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(A_n).$$

Lemme. Si μ est une mesure sur l'espace mesurable (X, \mathcal{F}) et si g est une fonction \mathcal{F} -mesurable définie sur X , à valeurs dans $[0, +\infty]$, l'intégrale par rapport à $\nu = g\mu$ d'une fonction \mathcal{F} -mesurable f à valeurs dans $[0, +\infty]$ est donnée par la formule

$$\int_X f(x) \, d\nu(x) = \int_X f(x)g(x) \, d\mu(x).$$

Si f est \mathcal{F} -mesurable réelle ou complexe, elle est ν -intégrable si et seulement si fg est μ -intégrable et on a la même formule pour l'intégrale.

Il est assez tentant de noter la mesure à densité en disant que $d\nu(x) = g(x) \, d\mu(x)$, l'expression qui est remplacée textuellement dans le calcul de l'intégrale.

Preuve. — Si $f = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$, la formule n'est qu'une traduction de la définition de ν . On intègre ensuite une fonction $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{A_j}$ \mathcal{F} -étagée en

$$\int_X \varphi \, d\nu = \sum_{j=1}^n a_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^n a_j \int_X \mathbf{1}_{A_j} g \, d\mu = \int_X \varphi g \, d\mu,$$

et on déduit le résultat général par limite croissante d'étagées : il existe une suite (φ_n) de fonctions \mathcal{F} -étagées positives qui tend vers f en croissant ; alors $\varphi_n g$ tend en croissant vers fg et on obtient en appliquant deux fois le théorème de convergence monotone, et le cas étagé déjà traité,

$$\int_X f \, d\nu = \lim_n \int_X \varphi_n \, d\nu = \lim_n \int_X \varphi_n g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu.$$

Exemples.

– La mesure $\mu_{(0,1)}$ de densité uniforme sur $[0, 1]$ s'obtient comme $\mathbf{1}_{(0,1)}(x) d\lambda(x)$, on a pour cette mesure

$$\mu_{(0,1)}(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0,1)}(x) d\lambda(x) = \int_0^1 dx = 1.$$

C'est une probabilité sur \mathbb{R} , c'est-à-dire une mesure finie sur \mathbb{R} telle que $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

– Pour tout $\alpha > 0$, la mesure $\alpha \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) e^{-\alpha x} dx$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

– La mesure gaussienne centrée réduite est la probabilité γ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ qui est donnée par $d\gamma(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx$; elle est « centrée » et « de variance égale à 1 »,

$$\int_{\mathbb{R}} x d\gamma(x) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} x^2 d\gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1,$$

calcul fait par intégration par parties,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(x e^{-x^2/2}) dx = \left[-x e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 0 + \sqrt{2\pi}.$$

Si on essayait le changement de variable $y = x^2/2$, on se ramènerait à la fonction Γ , et on trouverait que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ comme traduction de l'intégrale gaussienne,

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{1/2-1} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} (x^2/2)^{-1/2} x dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Par le même changement de variable on voit que $\Gamma(s) = 2^{1-s} \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} x^{2s-1} dx$. Le calcul de l'intégrale de x^2 pour $d\gamma$ sera ainsi ramené à la relation $\Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2)$, vue précédemment.

Remarque. Si $N \in \mathcal{F}$ est de mesure nulle pour μ , on aura

$$\nu(N) = \int_{\mathbf{X}} \mathbf{1}_N g d\mu = 0$$

puisque la fonction $\mathbf{1}_N g$ sous l'intégrale est nulle μ -presque partout. Ainsi, quand on a $d\nu(x) = g(x) d\mu(x)$ pour une certaine densité g ,

$$\mu(N) = 0 \Rightarrow \nu(N) = 0.$$

Le théorème de Radon-Nikodym donne une réciproque, dont on va énoncer un cas limité : si μ et ν sont finies et si tout ensemble μ -négligeable est ν -négligeable, alors il existe une densité g μ -intégrable telle que $d\nu(x) = g(x) d\mu(x)$.

Caractérisation d'une mesure sur \mathbb{R} , à densité par rapport à Lebesgue

On donne une mesure $d\mu(x) = g(x) dx$, qu'on suppose finie sur tous les boréliens bornés. Pour une telle mesure, on a pour tous $a \leq b$

$$\mu(]a, b]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{]a, b]}(t) g(t) dt$$

et $\mu([b, b]) = 0$, ce qui légitime l'écriture habituelle « avec des bornes d'intégration »,

$$\mu(]a, b]) = \mu([a, b]) = \int_a^b g(t) dt.$$

On a donc

$$F_{\mu,0}(x) = \int_0^x g(t) dt$$

(en prenant la convention des intégrales de Riemann quand $x < 0$) et dans le cas d'une mesure μ finie sur \mathbb{R} ,

$$F_{\mu}(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt.$$

On va donner une réciproque partielle et facile, qui donne la densité à partir de la fonction F .

Proposition. *Si μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, finie sur les boréliens bornés, et si g est une fonction borélienne ≥ 0 telle que pour tout x réel on ait*

$$F_{\mu,0}(x) = \int_0^x g(t) dt,$$

(conventions de Riemann quand $x < 0$), alors $d\mu(x) = g(x) dx$.

Si la fonction $F_{\mu,0}$ est continue sur \mathbb{R} , de classe C^1 sur \mathbb{R} privé d'un nombre fini de points, alors la dérivée g de $F_{\mu,0}$ est la densité de μ . Si la mesure μ est finie, on peut donner le même énoncé avec F_{μ} .

Preuve. — La première partie de l'énoncé traduit simplement la propriété d'unicité, exprimée au moyen de la fonction $F_{\mu,0}$, et qui résulte du théorème de classe monotone : en effet, les fonctions F associées aux deux mesures μ et $g(x) dx$ sont égales.

Pour la seconde partie de l'énoncé, on va se contenter de traiter un cas simple mais significatif, en supposant que F est dérivable sauf en 0, de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; la fonction $F = F_{\mu,0}$ est croissante, sa dérivée, définie en dehors de 0, est borélienne ≥ 0 . On va se ramener à la première partie en posant $g(x) = F'(x)$, borélienne ≥ 0 définie pour tout $x \neq 0$, donc presque partout. Il faut donc vérifier que $F(x) = \int_0^x g(t) dt$ pour tout x .

Calculons $F(x)$ pour un $x < 0$, par exemple (le cas $x > 0$ est analogue). Pour tout $s < 0$ et $x \leq s$, on a puisque F est de classe C^1 sur l'intervalle fermé $[x, s]$ et que $g = F'$

$$\int_x^s g(t) dt = F(s) - F(x);$$

comme F est continue en 0 (et pas seulement continue à droite!) et par convergence monotone, on obtient pour s_n tendant en croissant vers 0

$$\int_x^0 g(t) dt = \lim_n \int_x^{s_n} g(t) dt = \lim_n (F(s_n) - F(x)) = F(0) - F(x) = -F(x),$$

ce qui confirme que $F(x) = \int_0^x g(t) dt$ (convention Riemann) dans le cas $x < 0$. On procède de même pour $x > 0$, et on est ramené à la première partie de l'énoncé.

Le cas de μ finie est traité de la même façon.

Exemples.

— Considérons l'image μ de la mesure de Lebesgue $\lambda_{[0,1]}$ sur $[0, 1]$ par l'application $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in [0, 1]$ par $T(t) = t^n \in [0, 1]$; pour $0 \leq x \leq 1$, on voit que $T^{-1}(]-\infty, x]) = T^{-1}(]0, x]) =]0, x^{1/n}]$, donc

$$F_\mu(x) = \lambda(]0, x^{1/n}]) = x^{1/n},$$

et $F_\mu(x) = 0$ pour $x < 0$, $F_\mu(x) = 1$ pour $x > 1$. La fonction F_μ est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, donc la mesure μ admet la densité g définie par $g(x) = \frac{1}{n} x^{1/n-1}$ entre 0 et 1, et $g(x) = 0$ pour tout x en dehors de $[0, 1]$.

— Considérons l'image μ de la mesure de Lebesgue $\lambda_{[0,1]^2}$ sur le carré $[0, 1]^2$, par l'application $T : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(t_1, t_2) = t_1 + t_2$.

On voit que $F_\mu(x) = x^2/2$ si $0 \leq x \leq 1$: en effet, l'image inverse de $]-\infty, x]$ dans ce cas est le triangle des points (t_1, t_2) tels que $0 \leq t_1, t_2$ et $t_1 + t_2 \leq x$, triangle rectangle de côté x et de surface $x^2/2$. Ensuite, $F_\mu(x) = 1 - (2-x)^2/2 = 2x - x^2/2 - 1$ entre 1 et 2; dans ce cas il est plus facile de voir que l'image inverse de $]x, +\infty]$ est à nouveau un triangle, de côté $2-x$. Il en résulte que μ admet la densité g nulle en dehors de $[0, 2]$, et donnée par $g(x) = x$ sur $(0, 1)$ puis $g(x) = 2-x$ sur $(1, 2)$.

— Image μ de la mesure de Lebesgue λ_2 sur \mathbb{R}^2 par $T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les images inverses des intervalles $]-\infty, r]$ sont des disques. On trouve $F_{\mu,0}(r) = \pi r^2$ pour $r \geq 0$, donc $g(r) = 2\pi \mathbf{1}_{r \geq 0} r$; le calcul de l'intégrale des fonctions radiales en découle : si h est une fonction borélienne ≥ 0 sur \mathbb{R}^2 qui ne dépend que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction f borélienne ≥ 0 sur \mathbb{R} telle que $h(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(r) d\mu(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) r dr.$$

Changements de variables plus généraux, sur \mathbb{R}

On considère deux intervalles ouverts non vides I et J , et une bijection croissante G de I sur J ; on suppose qu'il existe une fonction g localement intégrable positive sur \mathbb{R} et G telle que pour tout $x < y$ dans I , on ait

$$G(y) - G(x) = \int_x^y g(t) dt.$$

Dans le cas où g est continue, la fonction G est de classe C^1 et le changement de variable $y = G(x)$ donne $dy = g(x) dx$.

On utilisera la variante suivante de la caractérisation de la mesure de Lebesgue : la mesure de Lebesgue sur J est la seule mesure telle que $\mu([a, b]) = b - a$ pour tout $a \leq b$, $a, b \in J$.

Proposition. Pour toute fonction f borélienne positive sur J , on a

$$\int_I f(G(x))g(x) dx = \int_J f(y) dy.$$

Preuve. — Il suffit de voir que l'image par G de la mesure $d\mu(x) = g(x) dx$ sur I est la mesure de Lebesgue sur J . Soient $u < v$ donnés dans J ; comme G est une bijection de I sur J , il existe a et b dans I tels que $G(a) = u$, $G(b) = v$ et $G^{-1}([u, v]) = [a, b]$. Alors

$$\mu(G^{-1}([u, v])) = \int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a) = v - u.$$

Corollaire. On suppose que φ est une bijection croissante de classe C^1 de l'intervalle $[a, b]$ sur $[\alpha, \beta]$; pour toute fonction f borélienne positive sur $[\alpha, \beta]$, on a

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(y) dy.$$

Preuve. — On pose $G(x) = \varphi(x)$ dans $[a, b]$ et en dehors, $G(x) = \beta + x - b$ si $x > b$ et $G(x) = \alpha + x - a$ si $x < a$; on pose aussi $g(x) = 1$ si $x \notin [a, b]$ et $g(x) = \varphi'(x)$ dans $[a, b]$.

Exemple. Autre calcul de l'image ν de Lebesgue sur $[0, 1]$ par l'application $x = T(u) = u^n$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(Tu) d\lambda_{(0,1)}(u) = \int_0^1 f(u^n) du.$$

On pose $x = u^n$, $u = G(x) = x^{1/n}$, $h(u) = f(u^n)$, $I = J = [0, 1]$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu(x) = \int_0^1 h(u) du = \int_0^1 h(G(x))g(x) dx = \int f(x)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)n^{-1}x^{1/n-1} dx.$$

Si pour toute fonction borélienne ≥ 0 on a l'égalité, *etc.*

Théorème de prolongement

On a évoqué à plusieurs reprises la question de la définition de la mesure de Lebesgue, non pas seulement sur les ensembles simples de la théorie de Riemann, mais sur tous les boréliens. Le problème n'est pas tellement que la mesure sur \mathbb{R} soit infinie : la vraie question est de définir la mesure pour tous les boréliens de $[0, 1]$, il est facile de passer à \mathbb{R} en faisant la série des résultats obtenus sur chaque $[n, n + 1]$, $n \in \mathbb{Z}$.

La « mesure de Riemann », provenant de la théorie de l'intégrale de Riemann, permettait de définir une mesure *finiment additive* sur tous les ensembles d'une algèbre \mathcal{R} de parties, les ensembles R -intégrables. On voit que le problème qui se pose à nous est d'étendre, si possible, une mesure donnée sur une algèbre en mesure σ -additive définie sur la σ -algèbre engendrée $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{R})$.

Dans la situation du théorème 1, on part d'une fonction F croissante et continue à droite sur $[0, 1]$; on pourra définir une mesure sur les sous-ensembles B de $]0, 1]$ qui sont réunion disjointe d'un nombre fini d'intervalles de la forme $]a_j, b_j]$, $0 \leq a_j \leq b_j \leq 1$ et $j = 1, \dots, n$, en posant

$$\mu(B) = \sum_{j=1}^n (F(b_j) - F(a_j)).$$

Ces ensembles simples forment une algèbre de parties \mathcal{A} . Si on veut étendre de façon σ -additive cette mesure à la tribu borélienne, il est nécessaire de s'occuper du cas suivant :

les ensembles $]1/2, 1],]1/4, 1/2], \dots,]2^{-n-1}, 2^{-n}], \dots$ sont dans l'algèbre \mathcal{A} , ils sont deux à deux disjoints et il se trouve, par le plus grand des hasards, que leur réunion est

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty}]2^{-n-1}, 2^{-n}] =]0, 1],$$

un ensemble qui est déjà dans l'algèbre !

Si un prolongement σ -additif $\tilde{\mu}$ existe, il devra donner à la réunion disjointe une mesure égale à la série des mesures des morceaux ; mais si $\tilde{\mu}$ est un prolongement, il donne la même mesure que la mesure initiale μ aux ensembles de l'algèbre. Il est donc nécessaire qu'on ait au départ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(]2^{-n-1}, 2^{-n}]) = \mu(]0, 1]).$$

C'est ici que la continuité à droite de F apparaît, car

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu(]2^{-k-1}, 2^{-k}]) = \mu(]2^{-n}, 1]) = F(1) - F(2^{-n}),$$

qui tend vers $F(1) - F(0) = \mu(]0, 1])$.

Ce qui est vraiment sympathique, c'est que cette condition évidemment nécessaire est suffisante !

Théorème. *Soit μ une mesure finiment additive positive finie sur une algèbre \mathcal{A} de parties de X ; pour qu'il existe un prolongement σ -additif de μ à la σ -algèbre engendrée par \mathcal{A} , il est nécessaire et suffisant que la condition suivante soit satisfaite : pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathcal{A} , deux à deux disjoints et dont la réunion $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est un élément de \mathcal{A} , on a*

$$(*) \quad \mu(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Voici un résumé de la stratégie de la preuve. Il est certainement nécessaire de prolonger la mesure à la classe \mathcal{A}_σ formée des réunions dénombrables $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ des suites $(B_n) \subset \mathcal{A}$; par découpage en couronnes dans l'algèbre \mathcal{A} , on peut exprimer cette réunion B comme réunion d'une suite *disjointe* $(C_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathcal{A} , et on pose

$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(C_n);$$

on doit vérifier que la somme ne dépend pas de la représentation particulière : on l'obtient grâce à l'hypothèse (*) (procéder à un redécoupage $C_n \cap D_m$), et par (*) on sait aussi que $\tilde{\mu} = \mu$ pour les ensembles de l'algèbre.

Il est tout aussi nécessaire de prolonger à la classe \mathcal{A}_δ formée des intersections dénombrables de suites d'éléments de \mathcal{A} , mais ici on utilise simplement le fait que A est dans \mathcal{A}_δ si et seulement si son complémentaire est dans \mathcal{A}_σ , et on pose

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(X) - \tilde{\mu}(A^c);$$

il y a une compatibilité à démontrer quand A est aussi dans \mathcal{A}_σ : c'est encore l'hypothèse (*) qui règle la question.

On peut maintenant définir une tribu et un prolongement (ça ne ne voit pas immédiatement, il faut un travail assez long pour prouver, essentiellement en même temps, qu'on a une tribu et une mesure). On définit la classe \mathcal{M} des parties Y de X qui admettent pour tout $\varepsilon > 0$ un encadrement

$$A_\varepsilon \subset Y \subset B_\varepsilon, \quad \text{avec } A_\varepsilon \in \mathcal{A}_\delta, B_\varepsilon \in \mathcal{A}_\sigma \quad \text{et } \tilde{\mu}(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon,$$

et on pose pour tout $Y \in \mathcal{M}$

$$\tilde{\mu}(Y) = \sup \{ \tilde{\mu}(A) : A \subset Y, A \in \mathcal{A}_\delta \} = \inf \{ \tilde{\mu}(B) : Y \subset B, B \in \mathcal{A}_\sigma \}.$$