cours 14, le lundi 15 mars 2010

IV. Espaces L^p

IV.1. *Convexité*

On dira que f est *continue et* C^1 *par morceaux* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est continue sur I et s'il existe un nombre fini de points $a_0 < a_1 < \ldots < a_\mathrm{N}$ de I tels que f soit de classe C^1 sur chacun des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, \mathrm{N}-1$, ainsi que sur les deux intervalles situés aux extrémités gauche et droite de I,

$$\{x \in \mathrm{I} : x \le a_0\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathrm{I} : x \ge a_\mathrm{N}\}\,;$$

par classe C^1 sur $[a, b]$, on entend que f' existe sur $]a, b[$ et admet un prolongement continu à l'adhérence $[a, b]$. Par la règle de l'Hospital, cela entraîne que f admet une dérivée à droite en a et une dérivée à gauche en b, qui sont égales respectivement aux limites de $f'(x)$ en a et en b,

$$f'_d(a) = \lim_{x \searrow a} f'(x), \quad f'_g(b) = \lim_{x \nearrow b} f'(x).$$

On a alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

par la « formule fondamentale » prouvée dans le chapitre sur l'intégrale de Riemann (premier cours).

Si f est continue et C^1 par morceaux sur un intervalle I, alors pour tous $a \le b$ éléments de I, on a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

où la dérivée f' est définie sur I privé d'un ensemble fini F de points. On le fait sur les morceaux C^1 et on recolle : il existe une subdivision $a = a_0 < \ldots < a_\mathrm{N} = b$ telle que f soit de classe C^1 sur chaque $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, \mathrm{N}-1$, donc

$$f(a_{j+1}) - f(a_j) = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat en sommant pour j variant de 0 à $\mathrm{N}-1$; noter que f' n'est pas définie aux points de l'ensemble fini F des points de subdivision, mais f' est bornée car sur chacun des compacts $[a_j, a_{j+1}]$, elle est prolongeable en fonction continue ; on a une fonction f' qui est mesurable bornée définie presque partout.

Lemme. *Si f est continue et* C^1 *par morceaux sur un intervalle* I, *avec une dérivée croissante (au sens large) sur* $\mathrm{I} \setminus \mathrm{F}$, F *ensemble fini, alors f est convexe sur* I.

Preuve. — Si a est un point de I, l'hypothèse de classe C^1 par morceaux entraîne que $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont les limites de $f'(x)$ à gauche et à droite de a. Comme f' est supposée croissante, on en déduit que $f'(u) \le f'_g(a) \le f'_d(a) \le f'(v)$ si u, v sont des points de I tels que $u < a < v$.

Si $u < v$ sont deux points de I et si $w = (1-t)u+tv$, $0 < t < 1$, alors $w-u = t(v-u)$, $v - w = (1 - t)(v - u)$, et

$$\frac{f(w) - f(u)}{w - u} = \frac{1}{w - u} \int_u^w f'(x)\,\mathrm{d}x \le f'_g(w)$$

$$\le f'_d(w) \le \frac{1}{v - w} \int_w^v f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

donc, en multipliant par $t(1 - t)(v - u) > 0$,

$$(1 - t)(f(w) - f(u)) \le t(f(v) - f(w)),$$

ce qui donne par regroupement

$$f\big((1 - t)u + tv\big) \le (1 - t)f(u) + tf(v),$$

pour tous $u, v \in$ I et $0 < t < 1$, et prouve que f est convexe sur I.

Remarque. Si g est une fonction réelle croissante sur l'intervalle I, si x_0 est un point fixé de I et si on pose $\mathrm{G}(x) = \int_{x_0}^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in$ I, alors G est convexe sur I par la preuve précédente. L'ensemble des points de discontinuité de la fonction croissante g est au plus dénombrable, et en chaque point x de continuité de g, la fonction G est dérivable et $\mathrm{G}'(x) = g(x)$.

Inversement : on prouve que si f est convexe sur un intervalle *ouvert* I, elle admet en tout point x de I une dérivée à gauche $f'_g(x)$ et une dérivée à droite $f'_d(x)$, $f'_g(x) \le f'_d(x)$, ces deux fonctions dérivées sont croissantes sur I, et égales sauf sur un ensemble de points au plus dénombrable ; de plus pour tous $a < b$ dans I, on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'_d(t)\,\mathrm{d}t$ (même résultat avec f'_g, qui est égale à f'_d presque partout). La description du paragraphe précédent donne donc toutes les fonctions convexes sur un intervalle ouvert.

Dans le cas d'un intervalle fermé $[a, b]$, il est possible que la fonction convexe f ne soit pas continue aux extrémités a et b, comme on le voit dans l'exemple où $f = 0$ sur $]a, b[$ et $f(a) = 1$, $f(b) = 2$; dans ce cas, $f(b) - f(a)$ n'est pas l'intégrale de f' entre a et b. Mais si on demande que f soit continue sur I, la description intégrale s'étend aux extrémités.

Exemples.

— Les fonctions affines sont convexes.

— La fonction exponentielle est convexe, ainsi que $x \to \mathrm{e}^{ax}$ pour tout a réel.

— Pour $p > 1$ la fonction $t \to |t|^p$ est convexe : la dérivée $t \to p\,\mathrm{sign}(t)|t|^{p-1}$ est continue et croissante. Pour $p = 1$ la convexité est vraie aussi, conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. On note que

$$\Big|\frac{a + b}{2}\Big|^p \le \frac{|a|^p + |b|^p}{2}$$

ce qu'on peut récrire sous la forme $|a + b|^p \le 2^{p-1}\big(|a|^p + |b|^p\big)$.

IV.2. *Les espaces $\mathcal{L}^p$ et* L^p

On suppose que p est un réel tel que $1 \le p < +\infty$. On désigne par $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables f à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que

$$\int_{\mathrm{X}} |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

On pose pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p$

$$\|f\|_p = \Bigl(\int_{\mathrm{X}} |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \Bigr)^{1/p}.$$

Il est clair que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, la fonction αf reste dans $\mathcal{L}^p$ et $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$. La fonction $u \to |u|^p$ est convexe, on a vu que

$$|u+v|^p \le 2^{p-1} \bigl(|u|^p + |v|^p \bigr),$$

ce qui montre que la somme de deux fonctions de $\mathcal{L}^p$ est dans $\mathcal{L}^p$, et on voit ainsi que $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel.

L'espace $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ est formé des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. On le munit de la norme du sup ou *norme uniforme*, qu'on désignera par la notation (non consacrée)

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in \mathrm{X}\}.$$

Pour cette norme l'espace est complet : une limite uniforme f d'une suite de fonctions bornées reste bornée, et c'est aussi une limite simple de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables, donc la limite f est $\mathcal{F}$-mesurable bornée.

Semi-norme sur $\mathcal{L}^p$, convexité de la boule unité

L'ensemble

$$\mathrm{B}_p := \bigl\{ f \in \mathcal{L}^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu) : \int_{\mathrm{X}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \le 1 \bigr\}$$

est un ensemble convexe : si f et g sont deux fonctions dans B_p, on note que pour tous $x \in \mathrm{X}$ et $0 \le t \le 1$,

$$\bigl| (1-t) f(x) + t g(x) \bigr|^p \le \bigl| (1-t)|f(x)| + t|g(x)| \bigr|^p \le (1-t)|f(x)|^p + t|g(x)|^p,$$

donc

$$\int_{\mathrm{X}} |(1-t)f(x) + tg(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \le (1-t) \int_{\mathrm{X}} |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) + t \int_{\mathrm{X}} |g(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \le 1.$$

Il en résulte qu'on a une semi-norme : si $a > \|f\|_p$ et $b > \|g\|_p$ considérons $f_1 = a^{-1} f$ et $g_1 = b^{-1} g$ qui sont dans la boule unité B_p, ainsi que la combinaison convexe

$$\frac{a}{a+b} \, f_1 + \frac{b}{a+b} \, g_1 = \frac{f+g}{a+b} \in \mathrm{B}_p \,;$$

par l'homogénéité de la fonction $\|.\|_p$ on en déduit que $\|f+g\|_p \le a+b$, et on fait tendre a vers $\|f\|_p$ et b vers $\|g\|_p$. À la limite,

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

On a donc l'inégalité triangulaire, et une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.

L'espace quotient L^p*, normé*

L'ensemble

$$\mathcal{N}_p = \Big\{ f : \|f\|_p = 0 \Big\} = \Big\{ f : \int_{\mathrm{X}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0 \Big\}$$

est le *noyau de la semi-norme* $\|.\|_p$. Comme on a une semi-norme, le noyau est un sous-espace vectoriel : si $f, g \in \mathcal{N}_p$, alors

$$\|\alpha f + \beta g\|_p \le |\alpha| \, \|f\|_p + |\beta| \, \|g\|_p = 0 \,;$$

de façon générale, tous les éléments f d'une classe fixée $\widehat{f}$ de $\mathcal{L}^p / \mathcal{N}_p$ ont la même semi-norme (on peut invoquer l'inégalité triangulaire : si f_1, f_2 sont dans la même classe, on a $\|f_2\|_p \le \|f_1\|_p + \|f_2 - f_1\|_p = \|f_1\|_p$, et on échange ensuite f_1 et f_2) ; on peut donc attribuer cette semi-norme constante à la classe, en posant

$$\|\widehat{f}\|_p = \|f\|_p$$

pour un représentant f quelconque. On obtient une semi-norme sur le quotient, qui est en fait une norme : en effet $\|\widehat{f}\|_p = 0$ signifie que $\|f\|_p = 0$ quand f est un représentant de cette classe $\widehat{f}$, donc f appartient à $\mathcal{N}_p$ et $\widehat{f} = \mathcal{N}_p$, qui est le 0 de l'espace quotient,

$$\|\widehat{f}\|_p = 0 \;\Rightarrow\; \widehat{f} = 0_{\mathrm{L}^p}.$$

Remarquons que $\mathcal{N}_p$ coïncide avec le sous-espace vectoriel des fonctions négligeables

$$\mathcal{N} = \Big\{ f : f \text{ est } \mathcal{F}\text{-mesurable et nulle } \mu\text{-presque partout } \Big\},$$

qui est indépendant de la valeur de p ; en effet, si l'intégrale de la fonction mesurable positive $|f|^p$ est nulle, on en déduit que $|f|^p$, donc aussi f, est nulle μ-presque partout. Inversement, si $f \in \mathcal{N}$, on a $\int_{\mathrm{X}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$ donc $f \in \mathcal{N}_p$.

L'espace L^∞

L'espace $\mathcal{N}$ des fonctions négligeables est contenu dans tous les espaces $\mathcal{L}^p$ pour $p < +\infty$, mais les fonctions négligeables ne sont pas nécessairement bornées. On introduit

$$\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N} \cap \mathcal{L}^\infty,$$

l'espace des fonctions μ-négligeables *bornées*. L'espace $\mathrm{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ est formé des classes de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$,

$$\mathrm{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu) = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mathrm{X}, \mathcal{F}) / \mathcal{N}_\infty.$$

L'espace $\mathcal{L}^\infty(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ était déjà normé (par la norme uniforme), et on peut voir que son sous-espace $\mathcal{N}_\infty$ est fermé pour cette norme. On est dans le cadre du quotient d'un espace normé par un sous-espace vectoriel fermé : les éléments d'une même classe n'ont pas la même norme uniforme ; par définition, la norme d'une classe $\widehat{f} \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ est l'inf des normes des éléments de la classe. Cela revient à définir la norme ainsi : si f est un représentant de la classe $\widehat{f}$, alors $\|\widehat{f}\|_\infty$ est le plus petit M tel que $|f| \le \mathrm{M}$ presque partout. On dit que M est le *sup essentiel* de la fonction f.

Posons en effet $\mathrm{M} = \|\widehat{f}\|_\infty$ et soit f un élément quelconque de la classe $\widehat{f}$; par définition de la norme quotient, il existe f_n équivalente à f telle que $\|f_n\|_u < \mathrm{M} + 2^{-n}$, pour tout entier $n \geq 0$, où cette fois la norme est la « vraie » norme du sup ; on a donc $|f_n| \leq \mathrm{M} + 2^{-n}$ *partout*, et comme f est égale à f_n μ-presque partout,

$$\mu\bigl(\{x \in \mathrm{X} : |f(x)| > \mathrm{M} + 2^{-n}\}\bigr) \leq \mu\bigl(\{f \neq f_n\}\bigr) = 0.$$

En faisant varier n on obtient une famille dénombrable d'ensembles négligeables, dont la réunion $\mathrm{N} = \bigl\{|f| > \mathrm{M}\bigr\}$ est encore un ensemble μ-négligeable ; il en résulte que μ-presque partout, on a $|f| \leq \mathrm{M}$. Réciproquement, si $|f| \leq \mathrm{M}$ μ-presque partout, on trouve une fonction $\widetilde{f}$ équivalente à f qui est *partout* $\leq \mathrm{M}$, donc $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \mathrm{M}$.

On peut dire tout de suite que L^∞, quotient d'un espace de Banach par un sous-espace vectoriel fermé, est complet d'après la théorie générale, mais on donnera aussi un argument *ad hoc* plus loin.

Remarque : classes de fonctions et fonctions définies presque partout. À chaque fonction μ-intégrable f (donc, mesurable définie presque partout) correspond une unique classe, un unique élément de $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$. En effet, toutes les « corrections » $\widetilde{f}$ de la fonction f forment une classe, élément de L^1.

L'espace normé L^p *est complet*

Théorème de Fischer-Riesz, 1907. *L'espace* $\mathrm{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *est complet.*

Preuve. — On suppose que $(\widehat{f_n})$ est une suite de Cauchy dans L^p. On choisit des représentants $(f_n) \subset \mathcal{L}^p$, qui sont des « vraies fonctions ». On peut trouver une sous-suite (n_k) telle que

$$\|\widehat{f}_{n_{k+1}} - \widehat{f}_{n_k}\|_p = \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$$

pour tout $k \geq 0$. Comme la suite de départ est de Cauchy, il suffit de trouver une limite pour la sous-suite $(\widehat{f}_{n_k})$. Posons

$$u_0 = f_{n_0}, \quad u_{k+1} = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$$

pour tout entier $k \geq 0$, de sorte que

$$\mathrm{U}_k := u_0 + \cdots + u_k = f_{n_k}, \quad \widehat{\mathrm{U}}_k = \widehat{f}_{n_k} \,;$$

il faut donc faire converger *dans l'espace normé* L^p la série de vecteurs $\sum \widehat{u}_k$, c'est-à-dire montrer que la suite $(\widehat{\mathrm{U}}_k)$ des sommes partielles converge vers une limite dans L^p. Posons

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \mathrm{V}_k(x) = \sum_{j=0}^{k} |u_j(x)| \,;$$

c'est une suite croissante, de limite ponctuelle

$$\mathrm{V}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_j(x)|$$

à valeurs dans $[0,+\infty]$. La suite croissante $(\mathrm{V}_k(x))^p$ tend vers $(\mathrm{V}(x))^p$, où on a convenu que $(+\infty)^p = +\infty$. Par l'inégalité triangulaire pour la norme de L^p, et en notant que les fonctions $h \in \mathcal{L}^p$ et $|h|$ ont la même (semi)-norme,

$$\|h\|_p^p = \int_{\mathrm{X}} |h|^p \,\mathrm{d}\mu = \bigl\| |h| \bigr\|_p^p,$$

on voit que

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{V}_k^p \,\mathrm{d}\mu = \|\sum_{j=0}^{k} |u_j| \|_p^p \le \Bigl(\sum_{j=0}^{k} \|u_j\|_p\Bigr)^p \le \Bigl(\|u_0\|_p + \sum_{j \geqslant 0} 2^{-j}\Bigr)^p =: \mathrm{M} < +\infty.$$

Par le TCM (théorème de convergence monotone),

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{V}^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_k \int_{\mathrm{X}} \mathrm{V}_k^p \,\mathrm{d}\mu \le \mathrm{M} < +\infty\,;$$

l'ensemble

$$\mathrm{N} = \{\mathrm{V}^p = +\infty\} = \{x \in \mathrm{X} : \mathrm{V}(x) = +\infty\} \in \mathcal{F}$$

est donc de mesure nulle. Quand $x \notin \mathrm{N}$, on a

$$\mathrm{V}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} |u_j(x)| < +\infty,$$

ce qui permet de considérer la fonction f définie par $f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j(x)$ pour tout $x \notin \mathrm{N}$, ce qui est vrai μ-presque partout, et $f(x) = 0$ sinon. Cette fonction f est $\mathcal{F}$-mesurable, et

$$|f|^p \le \Bigl(\sum_{j=0}^{+\infty} |u_j|\Bigr)^p \le \mathrm{V}^p$$

est intégrable, donc $f \in \mathcal{L}^p$. Il reste à prouver que les sommes partielles U_k tendent vers f pour la norme de L^p. On a en dehors de N, c'est-à-dire μ-presque partout,

$$|f - \mathrm{U}_k|^p = \Bigl|\sum_{j>k} u_j\Bigr|^p \le \Bigl|\sum_{j>k} |u_j|\Bigr|^p \le \mathrm{V}^p$$

et $|f(x) - \mathrm{U}_k(x)|^p \to 0$ pour tout $x \notin \mathrm{N}$, ce qui donne une convergence vers 0 dominée par la fonction intégrable V^p. Donc

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_{n_k}\|_p^p = \|f - \mathrm{U}_k\|_p^p = \int_{\mathrm{X}} |f - \mathrm{U}_k|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

La classe $\widehat{f}$ de f est un élément de L^p, limite de la suite de Cauchy $(\widehat{f}_n)$. On a montré que L^p est complet.

L'espace L^∞ est complet aussi, on l'a déjà expliqué par des raisons générales et promis une preuve *ad hoc* ; cette preuve n'utilise pas de résultat d'intégration, seulement un peu de théorie de la mesure et les résultats sur la convergence uniforme. Si (f_n) est de Cauchy dans L^∞ et si on choisit une sous-suite (f_{n_k}) telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty < 2^{-k}$, il existe pour tout k un ensemble μ-négligeable N_k tel que

$$\forall x \notin \mathrm{N}_k, \quad |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < 2^{-k}.$$

En dehors de l'ensemble négligeable $\mathrm{N} = \bigcup_k \mathrm{N}_k$, la série de fonctions

$$f_{n_0} + \sum_{k \geqslant 0} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

converge normalement ; sa somme f donne la limite voulue.

L'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *est un espace de Hilbert*
On doit d'abord remarquer que $f(x)\overline{g(x)}$ est intégrable quand $f, g \in \mathrm{L}^2$ car

$$2\,|f(x)\overline{g(x)}| \le |f(x)|^2 + |g(x)|^2,$$

qui est intégrable. Définissons le produit scalaire de L^2 par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathrm{X}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

On vérifie les propriétés de linéarité et de symétrie hermitienne voulues, et de plus

$$\langle f, f\rangle = \int_{\mathrm{X}} f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_2^2,$$

ce qui montre que la norme de L^2 « provient » du produit scalaire qu'on vient de définir. De plus l'espace est complet pour cette norme, on a donc bien un espace de Hilbert.

Extraction de sous-suites convergentes presque partout
Proposition technique. *Si* $1 \le p \le +\infty$ *et si la suite* $(f_n) \subset \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *converge vers* f *dans* L^p, *il existe des sous-suites* (f_{n_k}) *qui convergent presque partout vers* f.

Preuve. — Soit f la limite en norme L^p de la suite $(f_n) \subset \mathrm{L}^p$; on peut trouver une sous-suite (n_k) telle que $\|f_{n_k} - f\|_p < 2^{-k}$ pour tout entier $k \ge 0$; alors en posant $u_k = |f_{n_k} - f|^p \ge 0$ on a $\int_{\mathrm{X}} u_k\,\mathrm{d}\mu < 2^{-kp}$ et par le TCM version séries de fonctions positives,

$$\int_{\mathrm{X}} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\int_{\mathrm{X}} u_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big) < \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-kp} < +\infty\,;$$

puisque l'intégrale est finie, la série $\sum u_k(x)$ converge μ-presque partout, en particulier le terme général $u_k(x) = |f_{n_k}(x) - f(x)|^p$ tend vers 0 μ-presque partout ; on a donc bien trouvé une sous-suite (f_{n_k}) telle que

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } x, \quad f_{n_k}(x) \to f(x).$$