cours 15, le jeudi 18 mars 2010

Rappel. *Si une suite (f_n) converge vers f dans L^p, il existe des sous-suites qui convergent presque partout vers f.* Ce principe peut se révéler commode dans des situations où on a deux types d'information, une information en moyenne et une information ponctuelle.

Donnons un exemple avec des séries de Fourier : si f est continue, 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux, on peut montrer que les coefficients de Fourier

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

sont absolument sommables,

$$\mathrm{M} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$$

On a alors une série normalement convergente de fonctions continues,

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}$$

dont la somme g est par conséquent continue. D'un autre côté, comme f est de carré sommable, la théorie des bases hilbertiennes entraîne que les fonctions $\mathrm{S_N}f$ (polynômes trigonométriques) définies par

$$(\mathrm{S_N}f)(x) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}$$

convergent vers f dans L^2. Peut-on assurer que $f = g$, autrement dit, peut-on assurer que f est bien égale, en tout point, à la somme de sa série de Fourier ?

Dans le cas présent, l'extraction de suites presque partout convergentes donne une solution sans peine, et sans qu'on ait besoin de trop réfléchir : pour tout x, la suite numérique $(\mathrm{S_N}f)(x)$ tend vers $g(x)$, et on peut extraire une sous-suite (N_k) d'entiers telle que $(\mathrm{S}_{\mathrm{N}_k}f)(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout. On a donc $g(x) = f(x)$ presque partout. Mais comme les deux fonctions g et f sont continues, l'égalité presque partout pour la mesure de Lebesgue entraîne l'égalité partout : *si f est continue, 2π-périodique de classe C^1 par morceaux, on a pour tout x*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}\,.$$

Ici, on pouvait procéder autrement, mais en réfléchissant un tout petit peu plus. Pour tout x, la suite $((\mathrm{S_N}f)(x))$ est bornée par M, donc la fonction $|f - \mathrm{S_N}f|^2$ admet le majorant $(|f| + \mathrm{M})^2$, intégrable sur $[-\pi, \pi]$, et $|f - \mathrm{S_N}f|^2$ tend ponctuellement vers $|f - g|^2$. D'après Lebesgue dominé,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = \lim_{\mathrm{N}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (\mathrm{S_N}f)(x)|^2\,\frac{\mathrm{d}x}{2\pi} = 0$$

d'après la théorie hilbertienne. La fonction continue $|f - g|^2$, d'intégrale nulle, est donc identiquement nulle.

Norme sur $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$

Ici on a le quotient d'un espace de Banach, $\mathcal{L}^\infty(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ muni de la norme uniforme, par le sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{N}_\infty = \mathcal{N} \cap \mathcal{L}^\infty$. On a un espace quotient qui est complet, par la théorie générale. Si f est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable telle que la classe $f + \mathcal{N}$ contienne une fonction bornée f_1, alors

$$\widehat{f} = f_1 + \mathcal{N} \cap \mathcal{L}^\infty$$

est une classe de fonctions mesurables bornées, élément de L^∞, dont la norme quotient $\|\widehat{f}\|_\infty$ est donnée par le *sup essentiel* de f,

$$\mathrm{M}_\infty = \inf\{\mathrm{M} \geq 0 : |f| \leq \mathrm{M}\ \mu\text{-presque partout }\}.$$

On peut trouver une fonction f_2 dans la classe $\widehat{f}$ qui vérifie $|f_2| \leq \mathrm{M}_\infty$ *partout.*

Densité dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *des fonctions continues*

Proposition. *Les fonctions continues à support compact sur* $\mathbb{R}$ *sont denses dans* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ *quand* $1 \leq p < +\infty$.

Attention ! C'est faux dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. La norme de L^∞ induit la norme uniforme sur les fonctions continues ; si une suite de fonctions continues converge pour la norme de L^∞, elle est de Cauchy uniforme et la limite est une fonction continue. Il est donc impossible d'approcher ainsi les éléments de L^∞ qui n'ont aucun représentant continu. C'est le cas pour $\mathbf{1}_{[0,1]}$ par exemple.

Preuve. — Désignons par V_p l'adhérence dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact ; c'est un sous-espace vectoriel, fermé par définition. On a vu que pour tout borélien borné A de $\mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ continue à support compact telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi| \,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Comme $|\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi| \leq 1$, on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi| \,\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

ce qui montre que $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ est approché au sens de L^p, donc $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} \in \mathrm{V}_p$ pour tout borélien borné A.

Considérons maintenant une fonction $\mathcal{B}$-mesurable f, réelle ou complexe, telle que $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$; puisque la fonction f est $\mathcal{B}$-mesurable, on sait qu'il existe une suite (ψ_n) de fonctions $\mathcal{B}$-étagées qui tend simplement vers f et vérifie $|\psi_n| \leq |f|$; posons

$$\chi_n = \mathbf{1}_{[-n,n]}\, \psi_n\,;$$

on voit que la suite (χ_n) tend encore simplement vers f, et $|\chi_n| \leq |\psi_n| \leq |f|$ pour tout entier n. La fonction χ_n est une fonction $\mathcal{B}$-étagée, qui est combinaison linéaire de fonctions indicatrices de boréliens *bornés*, donc χ_n appartient à l'espace vectoriel V_p. La suite $|f - \chi_n|^p$ tend simplement vers 0 en étant majorée par la fonction intégrable $2^p|f|^p$, donc χ_n tend vers f en norme L^p et $f \in \mathrm{V}_p$: l'adhérence des fonctions continues à support compact contient toutes les fonctions de L^p (réel ou complexe).

Remarque. Le résultat vaut pour toute mesure μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ qui donne une mesure finie à tous les bornés, par exemple $\mathrm{d}\mu(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x)\,\mathrm{d}x$. Le résultat pour cette mesure revient à dire que les fonctions continues sur $[0,1]$ sont denses dans $\mathrm{L}^p([0,1])$, $p < +\infty$.

Par l'unicité du complété d'un espace métrique, dire que $\mathrm{C}([0,1])$ est dense dans $\mathrm{L}^2([0,1])$ revient à dire que $\mathrm{L}^2([0,1])$ est « le » complété de l'espace normé $\mathrm{C}([0,1])$ muni de la norme induite par L^2, point de vue adopté dans le cours d'espaces de Hilbert.

Développons : désignons par E l'espace vectoriel normé $\mathrm{C}([0,1])$, muni de la norme

$$\|\varphi\|_2 = \Bigl(\int_0^1 |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/2}.$$

Cette norme coïncide avec la norme induite par l'espace $\mathrm{L}^2([0,1])$ défini dans ce cours d'intégration. La théorie définit sur le complété $\widehat{\mathrm{E}}$ une norme qui étend la norme de E, pour laquelle $\widehat{\mathrm{E}}$ est complet, et E est dense dans son complété.

Si F est un élément du complété $\widehat{\mathrm{E}}$, il existe, puisque E est dense dans son complété, une suite (φ_n) de fonctions continues qui tend vers F ; cette suite est donc de Cauchy pour la norme de E, qui est la norme de L^2 : puisque L^2 est complet, la suite (φ_n) converge vers un élément $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$. On pourra vérifier que cette correspondance $\mathrm{F} \in \widehat{\mathrm{E}} \to f \in \mathrm{L}^2$ est linéaire, bijective, isométrique.

IV.3. Inégalités classiques

Inégalité de Hölder

On donne $1 < p, q < +\infty$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

qu'on appelle un *couple d'exposants conjugués*, par exemple $(2,2)$ ou $(3,3/2)$. On peut donner plusieurs formes équivalentes utiles de cette relation,

$$\frac{p+q}{pq} = 1, \quad p+q = pq, \quad \frac{q}{p} = q-1, \quad q = p(q-1), \quad p = q(p-1).$$

On note que si $a, b \ge 0$,

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

par exemple par la convexité de l'exponentielle : si $ab = 0$ c'est clair, sinon $a, b > 0$ et on pose $a = \mathrm{e}^{u/p}$, $b = \mathrm{e}^{v/q}$,

$$ab = \mathrm{e}^{u/p+v/q} \le \frac{\mathrm{e}^u}{p} + \frac{\mathrm{e}^v}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Si $f \in \mathrm{L}^p$, $g \in \mathrm{L}^q$, on en déduit que fg est intégrable,

$$(*) \qquad \int_{\mathrm{X}} |fg|\,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{p}\int_{\mathrm{X}} |f|^p\,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_{\mathrm{X}} |g|^q\,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

On étend la notion d'exposants conjugués aux cas limites $(1, +\infty)$ et $(+\infty, 1)$, pour lesquels on peut encore prétendre que $1/1 + 1/(+\infty) = 1$.

Proposition : inégalité de Hölder. *On suppose que* p, q *réels vérifient* $1 \le p, q \le +\infty$ *et la relation de conjugaison* $1/p + 1/q = 1$. *Si* $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *et* $g \in \mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$, *le produit* fg *est intégrable et*

$$\Bigl|\int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu\Bigr| \le \|f\|_p \,\|g\|_q.$$

De plus, pour $p < +\infty$,

$$\|f\|_p = \max\Bigl\{\int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu : \|g\|_q \le 1\Bigr\}\,;$$

pour $p = +\infty$, *et à condition que tout ensemble* $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ *de mesure infinie contienne un ensemble* $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$ *tel que* $0 < \mu(\mathrm{B}) < +\infty$, *on a*

$$\|f\|_\infty = \sup\Bigl\{\int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu : \|g\|_1 \le 1\Bigr\}.$$

Preuve. — Le premier résultat est évident pour $(1, +\infty)$ ou $(\infty, 1)$; si $f \in \mathrm{L}^1$ et $g \in \mathrm{L}^\infty$, on sait que $|g| \le \|g\|_\infty$ presque partout, donc

$$\Bigl|\int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu\Bigr| \le \int_{\mathrm{X}} |fg| \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{|g| \le \|g\|_\infty\}} |f|\,|g| \,\mathrm{d}\mu \le \|g\|_\infty \int_{\mathrm{X}} |f| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \,\|g\|_\infty.$$

On suppose maintenant que $1 < p, q < +\infty$ et $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$ (sinon, f ou g est nulle presque partout, $\int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu = 0$ et ce cas est clair). On va choisir $\alpha > 0$ plus loin ; pour l'instant on écrit avec $(*)$

$$\Bigl|\int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu\Bigr| \le \int_{\mathrm{X}} |fg| \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} |(\alpha f)(g/\alpha)| \,\mathrm{d}\mu \le \frac{\alpha^p}{p} \int_{\mathrm{X}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{\alpha^{-q}}{q} \int_{\mathrm{X}} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\,;$$

on choisit α pour que

$$\mathrm{I} := \alpha^p \int_{\mathrm{X}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \alpha^p \|f\|_p^p = \alpha^{-q} \|g\|_q^q = \alpha^{-q} \int_{\mathrm{X}} |g|^q \,\mathrm{d}\mu =: \mathrm{J},$$

donc on choisit $\alpha^{pq} = \alpha^{p+q} = \|g\|_q^q \,\|f\|_p^{-p}$, et on a $\alpha^p = \|g\|_q \,\|f\|_p^{-p/q}$. Alors

$$\Bigl|\int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu\Bigr| \le \frac{\mathrm{I}}{p} + \frac{\mathrm{J}}{q} = \mathrm{I},$$

et

$$\mathrm{I} = \alpha^p \|f\|_p^p = \|g\|_q \|f\|_p^{-p/q+p} = \|g\|_q \|f\|_p$$

ce qui termine la démonstration de la première partie.

La première partie montre que $\|f\|_p$ est un majorant pour le terme de droite de l'égalité à prouver. Inversement, si f est dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$, non nulle, posons

$$g(x) = \alpha\,|f(x)|^p / f(x)$$

si $f(x) \neq 0$ et 0 sinon. Si $p = 1$, on choisit $\alpha = 1$; sinon, $1 < p, q < +\infty$, et on choisit α pour que

$$\int_{\mathrm{X}} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \alpha^q \int_{\{f \neq 0\}} |f|^{(p-1)q} \,\mathrm{d}\mu = \alpha^q \int_{\{f \neq 0\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \alpha^q \int_{\mathrm{X}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = 1,$$

et alors

$$\int_{\mathrm{X}} fg \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_{\{f \neq 0\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \Bigl(\int_{\mathrm{X}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \Bigr)^{-1/q+1} = \|f\|_p,$$

on a donc réalisé le maximum possible avec cette fonction g de la boule unité de L^q.

Le cas L^∞ est spécial. Si la norme L^∞ de f est $\mathrm{M} = \|f\|_\infty > 0$, l'ensemble

$$\mathrm{A} = \{|f| > \mathrm{M} - \varepsilon\} \in \mathcal{F}$$

où on a choisi $0 < \varepsilon < \mathrm{M}$, est de mesure > 0, peut-être infinie. D'après l'hypothèse additionnelle, l'ensemble A contient un ensemble B de mesure > 0 et finie (si A est de mesure finie, on prend $\mathrm{B} = \mathrm{A}$). On pose

$$g = \mathbf{1}_{\mathrm{B}} \frac{|f|}{\mu(\mathrm{B}) f}$$

qui est de norme un dans L^1. Alors

$$\int_{\mathrm{X}} fg \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(\mathrm{B})} \int_{\mathrm{B}} |f| \,\mathrm{d}\mu > \mathrm{M} - \varepsilon.$$

Remarques.

— La condition pour $p = +\infty$ est satisfaite quand la mesure μ est σ-finie : on dit que μ est une *mesure σ-finie* sur $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ s'il existe une suite $(\mathrm{C}_n) \subset \mathcal{F}$, qu'on peut supposer croissante, telle que $\mathrm{X} = \bigcup_n \mathrm{C}_n$ et que $\mu(\mathrm{C}_n) < +\infty$ pour tout n. L'exemple typique est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, avec par exemple $\mathrm{C}_n = [-n, n]$.

Si μ est σ-finie et si $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ est de mesure infinie, les ensembles $\mathrm{B}_n = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}_n$ sont de mesure finie mais $\mu(\mathrm{B}_n) \to +\infty = \mu(\mathrm{A})$; il en résulte que pour n assez grand, on a $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{A}$ et $0 < \mu(\mathrm{B}_n) < +\infty$.

— Le cas $p = 2$ de l'inégalité de Hölder est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz des espaces de Hilbert.

— Si $p = +\infty$, si $f(x) = x$ sur $\mathrm{X} = [0, 1]$, on voit que dans le cas $p = +\infty$ le sup en $g \in \mathrm{L}^1([0, 1], \lambda)$ n'est pas atteint. On a $\|f\|_\infty = 1$ mais pour toute g telle que $\|g\|_1 \leq 1$, la fonction $(1 - x)g(x)$ est ≥ 0 sur $[0, 1]$ et n'est pas presque partout nulle, donc

$$0 < \int_0^1 (1 - x) g(x) \,\mathrm{d}x \leq 1 - \int_0^1 x g(x) \,\mathrm{d}x,$$

et par conséquent on a toujours $\int_0^1 x g(x) \,\mathrm{d}x < 1$, pour toute g de norme ≤ 1 dans $\mathrm{L}^1([0, 1])$. Le sup en g de ces intégrales est égal à 1, mais n'est atteint par aucune g.

Conséquence : inclusion des espaces en mesure finie. Lorsque la mesure μ est finie, les espaces L^p sont décroissants avec p : on a $\mathrm{L}^p(\mu) \subset \mathrm{L}^1(\mu)$ pour tout $p \geq 1$,

$$\int_{\mathrm{X}} |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} |f|.1 \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \Bigl(\int_{\mathrm{X}} 1^q \,\mathrm{d}\mu\Bigr)^{1/q} = \mu(\mathrm{X})^{1/q} \|f\|_p.$$

En appliquant cette inégalité à $|f|^s$ et $p = r/s$ on voit que $\mathrm{L}^r(\mu) \subset \mathrm{L}^s(\mu)$ pour tous $r \geq s \geq 1$.

Dualité

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p$, définissons une forme linéaire ℓ_f sur L^q en posant

$$\forall g \in \mathrm{L}^q, \quad \ell_f(g) = \int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu.$$

La première partie de l'inégalité de Hölder montre que ℓ_f est continue sur L^q, avec $\|\ell_f\| \leq \|f\|_p$. La deuxième partie montre que les deux normes sont égales (sous une condition si $p = +\infty$, par exemple à condition que μ soit σ-finie).

Proposition : injection isométrique dans le dual de L^q. *Si* $(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *est un espace mesuré quelconque et* $1 < p < +\infty$, $1/p + 1/q = 1$, *l'application* j_p *de* $\mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *dans le dual (topologique) de* $\mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *est une isométrie linéaire ; si* μ *est* σ*-finie, l'application* j_∞ *est une isométrie linéaire de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *dans le dual (topologique) de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$.

Remarque. Le théorème de représentation vu dans le cours sur les espaces de Hilbert permet de dire que toute forme linéaire continue sur L^2 peut être obtenue de la façon précédente, c'est à dire que j_2 est une bijection linéaire de L^2 sur le dual topologique de L^2. Il faut faire attention à un petit détail dans le cas complexe. Il n'y avait aucune raison de placer une barre de conjugaison dans la définition de ℓ_f, ce qui fait que j_2 est $\mathbb{C}$*-linéaire* dans le cas complexe. Au contraire, on doit mettre une barre de conjugaison dans le produit scalaire hilbertien, qui fait que l'identification hilbertienne i_{H} générale entre un Hilbert H et son dual topologique H′ est *antilinéaire*, $i_{\mathrm{H}}(\alpha x) = \overline{\alpha}\, i_{\mathrm{H}}(x)$ pour tout scalaire α et tout $x \in \mathrm{H}$.

Si ℓ est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert L^2, il existe un vecteur $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^2$ qui représente par produit scalaire cette forme linéaire,

$$\forall g \in \mathrm{L}^2, \quad \ell(g) = \langle g, \mathrm{F} \rangle = \int_{\mathrm{X}} g(x) \overline{\mathrm{F}(x)} \,\mathrm{d}\mu(x).$$

On voit donc que ℓ est l'image par j_2 de la fonction $f = \overline{\mathrm{F}} \in \mathrm{L}^2$, complexe conjuguée de la fonction F.

On admettra la généralisation suivante : *pour tout* p *tel que* $1 < p < +\infty$ *et tout espace mesuré* $(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$, *l'application* j_p *est une bijection linéaire isométrique de* $\mathrm{L}^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *sur le dual topologique de* $\mathrm{L}^q(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$, *où* $1/p + 1/q = 1$. *Si la mesure* μ *est* σ*-finie, l'application* j_∞ *est une bijection linéaire isométrique de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ *sur le dual topologique de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$.

On peut déduire le cas $1 \leq p \leq 2$ du théorème hilbertien du cas $p = 2$. Les autres cas passent par le théorème de Radon-Nikodym, qui est en fait une autre conséquence du cas hilbertien.

Inégalité de Jensen

Proposition. *Si φ est convexe sur l'intervalle* I, *si f est réelle intégrable à valeurs dans* I *et si μ est une probabilité sur* $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$, *on a*

$$\varphi\Big(\int_{\mathrm{X}} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big) \le \int_{\mathrm{X}} \varphi(f(x))\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Il est possible que l'intégrale de droite soit égale à $+\infty$.

La fonction convexe φ admet des minorantes affines, de la forme $t \in \mathbb{R} \to at + b$; la fonction $\varphi(f)$ est donc minorée par la fonction intégrable $af + b$: la partie négative de $\varphi(f)$ a une intégrale finie, ce qui permet de donner un sens généralisé, fini ou égal à $+\infty$, à l'intégrale de $\varphi(f)$.

Preuve. — On pose $m = \int_{\mathrm{X}} f\,\mathrm{d}\mu$; si m minore l'intervalle I, la fonction $f - m$ est ≥ 0 d'intégrale nulle,

$$\int_{\mathrm{X}} (f - m)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} f\,\mathrm{d}\mu - m\,\mu(\mathrm{X}) = m - m = 0,$$

donc $f - m$ est presque partout nulle ; il en résulte que $f(x) = m$ μ-presque partout, en particulier m est une valeur de f, donc $m \in \mathrm{I}$ est le minimum de I ; puisque $f = m$ μ-presque partout et que $m \in \mathrm{I}$, on a $\varphi(f(x)) = \varphi(m)$ pour presque tout x, donc

$$\int_{\mathrm{X}} \varphi(f(x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \varphi(m) = \varphi\Big(\int_{\mathrm{X}} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,;$$

on procède de même si m est un majorant de I.

On suppose donc maintenant que m est intérieur à I ; alors $\varphi'_g(m)$, $\varphi'_d(m)$ existent ; si α est la dérivée (à droite, à gauche) de φ au point m, on a

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \varphi(t) - \varphi(m) \ge \alpha\,(t - m)$$

donc

$$\int_{\mathrm{X}} \big(\varphi(f(x)) - \varphi(m)\big)\,\mathrm{d}\mu(x) \ge \alpha \int_{\mathrm{X}} \big(f(x) - m\big)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Jensen pour $\varphi(t) = |t|^p$ et une mesure finie

On suppose que μ est une mesure finie sur $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$. On considère la probabilité ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ définie par $\nu = (\mu(\mathrm{X}))^{-1}\mu$; si f est $\mathcal{F}$-mesurable ≥ 0, d'intégrale finie pour commencer, on peut appliquer directement le résultat précédent à la fonction convexe $t \in \mathbb{R} \to |t|^p$,

$$\Big(\int_{\mathrm{X}} f\,\mathrm{d}\nu\Big)^p \le \int_{\mathrm{X}} f^p\,\mathrm{d}\nu.$$

Si l'intégrale de droite est $+\infty$, l'inégalité est vraie ; sinon on trouve des fonctions étagées intégrables qui croissent vers f et on généralise l'inégalité précédente à toutes les fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. En revenant à μ, on obtient que pour toute fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\Big(\int_{\mathrm{X}} f\,\mathrm{d}\mu\Big)^p \le \mu(\mathrm{X})^{p-1} \int_{\mathrm{X}} f^p\,\mathrm{d}\mu$$

valeur $+\infty$ admise, et avec la convention $(+\infty)^p = +\infty$.

Retrouver Hölder avec Jensen

On suppose $f, g \geq 0$, non nulles, $g \in \mathrm{L}^q$, on pose $\mathrm{B} = \{g > 0\}$ et pour la mesure finie $\mathrm{d}\nu = g^q \,\mathrm{d}\mu$, on va appliquer la version de Jensen pour $t \to |t|^p$; là où $g > 0$, on peut écrire $g = g^{1-q} g^q$: cette décomposition aura donc un sens sur l'ensemble B. On obtient

$$\Big(\int_{\mathrm{X}} f g \,\mathrm{d}\mu\Big)^p = \Big(\int_{\mathrm{X}} f \mathbf{1}_{\mathrm{B}} g \,\mathrm{d}\mu\Big)^p = \Big(\int_{\mathrm{B}} f g \,\mathrm{d}\mu\Big)^p = \Big(\int_{\mathrm{B}} f g^{1-q} g^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^p = \Big(\int_{\mathrm{B}} f g^{1-q} \,\mathrm{d}\nu\Big)^p$$

$$\leq \big(\nu(\mathrm{X})\big)^{p-1} \Big(\int_{\mathrm{B}} f^p g^{p(1-q)} \,\mathrm{d}\nu\Big) = \big(\nu(\mathrm{X})\big)^{p-1} \Big(\int_{\mathrm{B}} f^p g^{-q} \,\mathrm{d}\nu\Big)$$

$$= \big(\int_{\mathrm{X}} g^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{p-1} \Big(\int_{\mathrm{B}} f^p g^{-q} g^q \,\mathrm{d}\mu\Big) = \|g\|_q^{q(p-1)} \Big(\int_{\mathrm{X}} f^p \mathbf{1}_{\mathrm{B}} \,\mathrm{d}\mu\Big) \leq \|g\|_q^p \, \|f\|_p^p.$$

On a ainsi retrouvé l'inégalité de Hölder.