Exercices de mise en train

Exercice : loi de l'inf de deux uniformes indépendantes, et (re)calcul de l'espérance.

On donne $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ v.a. uniformes sur $[0,1]$, indépendantes ; on considère $\mathrm{V} = \inf(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$, dont les valeurs sont clairement dans $[0,1]$ presque sûrement. Soit x entre 0 et 1 ; si $\mathrm{V} > x$ c'est que U_1 et U_2 sont $> x$ toutes les deux, donc par indépendance, la probabilité de l'événement $(\mathrm{V} > x) = (\mathrm{U}_1 > x) \,\&\, (\mathrm{U}_2 > x)$ est égale au produit

$$\mathrm{P}(\mathrm{U}_1 > x)\mathrm{P}(\mathrm{U}_2 > x) = \bigl(\mathrm{P}(\mathrm{U}_1 > x)\bigr)^2 = \Bigl(\int_x^{+\infty} \mathbf{1}_{[0,1]}(t)\,\mathrm{d}t\Bigr)^2 = (1-x)^2\,;$$

la fonction de répartition de V est $\mathrm{F}_\mathrm{V}(x) = 1 - (1-x)^2$ sur $[0,1]$, $\mathrm{F}_\mathrm{V}(x) = 0$ si $x \le 0$ et $\mathrm{F}_\mathrm{V}(x) = 1$ si $x \ge 1$. La fonction F_V est continue et de classe C^1 par morceaux ; il en résulte que la loi de V admet pour densité la dérivée f_V de F_V, égale à $f_\mathrm{V}(x) = 2(1-x)$ sur $[0,1]$, et égale à 0 en dehors de $[0,1]$. On peut alors retrouver l'espérance de l'inf, qu'on avait calculée par Fubini au cours précédent :

$$\mathrm{E}\,\mathrm{V} = \int_\mathbb{R} x\,\mathrm{d}\mathrm{P}_\mathrm{V}(x) = \int_\mathbb{R} x f_\mathrm{V}(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x = \Bigl[x^2 - 2x^3/3\Bigr]_{x=0}^1 = 1 - 2/3 = 1/3.$$

Dans le même genre

Si T est une v.a. exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et si $t \ge 0$, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} > t) = \int_t^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \Bigl[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\Bigr]_t^{+\infty} = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,.$$

On en déduit la loi de l'inf de deux variables exponentielles indépendantes T_1 et T_2, de paramètres λ_1, λ_2 :

$$\mathrm{P}(\inf(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2) > t) = \mathrm{P}\bigl((\mathrm{T}_1 > t) \,\&\, (\mathrm{T}_2 > t)\bigr) =$$
$$= \mathrm{P}(\mathrm{T}_1 > t)\mathrm{P}(\mathrm{T}_2 > t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\,\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,.$$

On trouve donc que $\mathrm{T} = \inf(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$, dont on a calculé l'espérance, égale à $1/\alpha$. Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le temps moyen d'attente $1/(2\lambda)$ du premier bus arrivé parmi deux « bus exponentiels » indépendants de paramètre λ est la moitié du temps d'attente moyen d'un seul (cela semble bien naturel ; mais le premier exercice montre que le résultat ne serait pas vrai pour des « bus uniformes »).

Remarque. La loi exponentielle est « sans mémoire » : on commence une expérience au temps 0, attendant un certain événement aléatoire qui se produira au temps $\mathrm{T} > 0$, en suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Mais en fait, on a raté le début et on commence à attendre au temps $t > 0$; quelle est la loi du temps $\mathrm{S} = \mathrm{T} - t$ restant à attendre, sachant que l'autobus n'est pas encore passé à l'instant t ? On trouve

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{S} > u)}{\mathrm{P}(\mathrm{T} > t)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{T} > t+u)}{\mathrm{P}(\mathrm{T} > t)} = \mathrm{e}^{-\lambda(t+u)} \,/\, \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda u} = \mathrm{P}(\mathrm{T} > u),$$

donc : *la loi conditionnelle de* $\mathrm{T} - t$*, sachant que* $\mathrm{T} > t$*, est la même que la loi de* T.

Groupements de tribus indépendantes

Lemme-rappel. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *un espace de probabilité ; si un événement* $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ *est indépendant de tous les événements* $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ *d'une classe* $\mathcal{C}$ *stable par intersection finie, alors* A *est indépendant de la tribu* $\sigma(\mathcal{C})$ *engendrée par* $\mathcal{C}$.

Lemme. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *un espace de probabilité ; si les sous-tribus* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q$ *de* $\mathcal{F}$ *sont indépendantes, alors les tribus* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p, \sigma(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q)$ *sont indépendantes.*

Preuve. — On prend des $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, p$ fixés et on considère

$$\mathrm{A} = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{A}_i.$$

Considérons d'autre part la classe $\mathcal{C}$ formée des ensembles C de la forme

$$\mathrm{C} = \mathrm{B}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{B}_q,$$

où les B_j varient dans $\mathcal{B}_j$, $j = 1, \ldots, q$; cette classe $\mathcal{C}$ contient toutes les tribus $\mathcal{B}_j$ (prendre $\mathrm{B}_j \in \mathcal{B}_j$ quelconque et les autres B_k, $k \neq j$, égaux à Ω), et $\mathcal{C}$ est un π-système : si $\mathrm{C}' = \bigcap_{j=1}^{q} \mathrm{B}'_j$ est un autre élément de $\mathcal{C}$, on a

$$\mathrm{C} \cap \mathrm{C}' = (\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}'_1) \cap \ldots \cap (\mathrm{B}_q \cap \mathrm{B}'_q) \in \mathcal{C},$$

donc $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, et $\mathcal{C}$ admet Ω comme élément puisque $\Omega \in \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{C}$.

D'après l'hypothèse d'indépendance des $p + q$ tribus, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \Bigl(\prod_{i=1}^{p} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i)\Bigr)\Bigl(\prod_{j=1}^{q} \mathrm{P}(\mathrm{B}_j)\Bigr) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{C})\,;$$

ainsi, l'événement A est indépendant du π-système $\mathcal{C}$, donc d'après le lemme-rappel ci-dessus, on déduit que A est indépendant de $\sigma(\mathcal{C})$, qui contient $\sigma(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q)$ puisque $\mathcal{C}$ contient toutes les tribus $\mathcal{B}_j$ (en fait, $\sigma(\mathcal{C})$ est égale à la tribu $\sigma(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q)$, voir plus loin). On obtient $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$ pour tout B de $\sigma(\mathcal{C})$.

Finalement, pour tous $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, p$ et tout $\mathrm{B} \in \sigma(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q)$, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_p \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_p)\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) \ldots \mathrm{P}(\mathrm{A}_p)\mathrm{P}(\mathrm{B}),$$

ce qui prouve l'indépendance annoncée.

Revenons sur le fait (mineur) que $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite tribu $\mathcal{T}$ contenant les tribus $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q$: si $\mathcal{T}$ contient toutes ces tribus, alors $\mathcal{T}$ contient les ensembles de la forme $\mathrm{B}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{B}_q$ où $\mathrm{B}_j \in \mathcal{B}_j$, donc $\mathcal{T}$ contient $\mathcal{C}$ et aussi $\sigma(\mathcal{C})$, ce qui montre l'inclusion inverse entre $\sigma(\mathcal{C})$ et $\sigma(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q)$.

Corollaire. *Si les sous-tribus* $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_\mathrm{N}$ *de* $\mathcal{F}$ *sont indépendantes, alors les groupements par paquets disjoints sont indépendants : si* $\mathrm{J}_1, \ldots, \mathrm{J}_r$ *sont des sous-ensembles de* $\{1, \ldots, \mathrm{N}\}$*, deux à deux disjoints, les tribus « regroupées »*

$$\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{A}_i, i \in \mathrm{J}_1), \ldots, \mathcal{B}_r = \sigma(\mathcal{A}_i, i \in \mathrm{J}_r)$$

sont indépendantes.

Preuve. — De proche en proche, en utilisant le lemme précédent : d'abord, $\mathcal{B}_r$ et les $\mathcal{A}_i$, $i \notin \mathrm{J}_r$ forment une famille de tribus indépendantes ; ensuite, $\mathcal{B}_{r-1}$, $\mathcal{B}_r$ et les $\mathcal{A}_i$, $i \notin \mathrm{J}_{r-1} \cup \mathrm{J}_r$ sont indépendantes, etc.

Groupement de v.a. indépendantes

Remarques.

1. *Si* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *est un espace de probabilité, si les sous-tribus* $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_q$ *de* $\mathcal{F}$ *sont indépendantes, si* $g_1, \ldots, g_q$ *sont des v.a. telles que* g_j *soit* $\mathcal{B}_j$*-mesurable pour chaque* $j = 1, \ldots, q$*, alors* $g_1, g_2, \ldots, g_q$ *sont indépendantes.*

En effet, si $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_q$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{g_j \in \mathrm{A}_j\}$ est dans $\mathcal{B}_j$ pour $j = 1, \ldots, q$, et l'indépendance de ces tribus $(\mathcal{B}_j)$ implique

$$\mathrm{P}\big(\{g_1 \in \mathrm{A}_1\} \,\&\, \ldots \,\&\, \{g_q \in \mathrm{A}_q\}\big) = \prod_{j=1}^{q} \mathrm{P}(\{g_j \in \mathrm{A}_j\}),$$

ce qui signifie que les v.a. $g_1, \ldots, g_q$ sont indépendantes.

2. *Si* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *est un espace de probabilité, si les* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ *sont des v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *et* f *une fonction borélienne sur* $\mathbb{R}^m$*, alors la composée* $f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m)$ *est une fonction* $\sigma(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_m)$*-mesurable.*

En effet, si on pose $\mathcal{A} = \sigma(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_m)$, chaque X_i est $\sigma(\mathrm{X}_i)$-mesurable par définition de la tribu engendrée par X_i, donc X_i est $\mathcal{A}$-mesurable puisque $\sigma(\mathrm{X}_i) \subset \mathcal{A}$, donc

$$\overrightarrow{\mathrm{X}} : \omega \to (\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_m(\omega)) \in \mathbb{R}^m$$

est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans l'espace mesurable produit $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B})$, qui coïncide avec l'espace mesurable $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})$. Finalement, la composition

$$f \circ \overrightarrow{\mathrm{X}} : \omega \to f(\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_m(\omega)) \in \mathbb{R}$$

de ces deux applications mesurables $\overrightarrow{\mathrm{X}}$ et f est $\mathcal{A}$-mesurable.

3. *Si des variables aléatoires* $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_\mathrm{N}$ *sont indépendantes, alors les fonctions* $\varphi_k(\mathrm{V}_i : i \in \mathrm{J}_k)$ *dépendant de paquets disjoints* $\mathrm{J}_k \subset \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$, $k = 1, \ldots, r$ *sont indépendantes : par exemple, si* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$, $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n$, $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_p$ *sont indépendantes, et si* f, g, h *sont boréliennes, alors les trois variables aléatoires*

$$f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m), \;\; g(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n) \;\; \textit{et} \;\; h(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_p)$$

sont indépendantes.

D'après le groupement par paquets de tribus indépendantes, on sait que les trois tribus $\mathcal{A} = \sigma(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m)$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ et $\mathcal{C} = \sigma(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_p)$ sont indépendantes. Par le point **2**, la fonction $\mathrm{F} = f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m)$ est $\mathcal{A}$-mesurable, $\mathrm{G} = g(\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n)$ est $\mathcal{B}$-mesurable et $\mathrm{H} = h(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_p)$ est $\mathcal{C}$-mesurable. Par le point **1**, on déduit que F, G et H sont des v.a. indépendantes.

Indépendance et espérance

Théorème. *Si* X *et* Y *sont indépendantes,*

$$\mathrm{E}\big(|\mathrm{X}|\,|\mathrm{Y}|\big) = \big(\mathrm{E}\,|\mathrm{X}|\big)\,\big(\mathrm{E}\,|\mathrm{Y}|\big).$$

Si X, Y *sont indépendantes et intégrables, alors* XY *est intégrable et*

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}\mathrm{Y}) = (\mathrm{E}\,\mathrm{X})\,(\mathrm{E}\,\mathrm{Y}).$$

Si $X_1, \dots, X_n$ *sont indépendantes et intégrables, alors le produit* $X_1 X_2 \dots X_n$ *est intégrable et*

$$E\big(X_1 X_2 \dots X_n\big) = (E\, X_1) \dots (E\, X_n).$$

Preuve. — Si X et Y sont indépendantes, on sait que la loi $P_{(X,Y)}$ du couple est la probabilité sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ égale au produit tensoriel des deux lois P_X et P_Y. On a donc par mesure image puis Fubini positif

$$E\,|X|\,|Y| = \int_{\mathbb{R}^2} |x|\,|y| \,dP_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} |x|\,|y| \,dP_X(x) dP_Y(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |x| \Big(\int_{\mathbb{R}} |y| \,dP_Y(y) \Big) \,dP_X(x) = \Big(\int_{\mathbb{R}} |x| \,dP_X(x) \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} |y| \,dP_Y(y) \Big) = E\,|X|\; E\,|Y|.$$

Si X, Y sont intégrables, il résulte du point précédent que XY est intégrable, et le résultat final est obtenu par Fubini (au lieu de Fubini positif). On peut aussi raisonner en découpant $XY = (X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-)$, appliquer le cas positif et regrouper : mais c'est bien ainsi qu'on démontre Fubini général à partir de Fubini positif.

Le dernier point se montre par récurrence sur $n \ge 2$, en utilisant le principe de groupement par paquets disjoints. Faisons l'hypothèse de récurrence que le résultat est vrai pour $n - 1 \ge 2$; on note que les deux v.a. X_1 et $Y = X_2 X_3 \dots X_n$ sont indépendantes, comme fonctions des deux paquets disjoints $\{X_1\}$ et $\{X_2, X_3, \dots, X_n\}$ de variables indépendantes. On a donc, par le cas déjà traité de deux variables, et par l'hypothèse de récurrence,

$$E\big(X_1 X_2 \dots X_n\big) = E\big(X_1 (X_2 \dots X_n)\big) = (E\, X_1)\, E\big(X_2 \dots X_n\big) = (E\, X_1)(E\, X_2) \dots (E\, X_n),$$

ce qui démontre la possibilité de la récurrence.

Dans l'énoncé qui suit, on a choisi pour fixer les idées de s'intéresser au cas de trois paquets de variables. Il va de soi que le résultat reste vrai pour quatre, cinq,... ou deux ! Le cas du groupement le plus général est facile à comprendre, mais serait un peu désagréable à écrire : on devrait découper l'ensemble d'indices $\{1, \dots, N\}$ en segments disjoints $\{1, \dots, n_1\}$, $\{n_1 + 1, \dots, n_2\}$, $\{n_2 + 1, \dots, n_3\}$, jusqu'à $n_k = N$. On a donc évité.

Corollaire 1. *Si* $X_1, \dots, X_m$, $Y_1, \dots, Y_n$, $Z_1, \dots, Z_p$ *sont indépendantes, et si* f, g, h *sont boréliennes positives, alors*

$$(*) \qquad \begin{aligned} &E\big(f(X_1, \dots, X_m) g(Y_1, \dots, Y_n) h(Z_1, \dots, Z_p)\big) \\ &= \big(E f(X_1, \dots, X_m)\big) \big(E\, g(Y_1, \dots, Y_n)\big) \big(E\, h(Z_1, \dots, Z_p)\big). \end{aligned}$$

On a le même résultat dans le cas intégrable : si $f(X_1, \dots, X_m)$, $g(Y_1, \dots, Y_n)$ *et* $h(Z_1, \dots, Z_p)$ *sont intégrables, le produit des trois est intégrable, et son intégrale (ou espérance) se calcule par la même formule* $(*)$.

Preuve. — D'après les remarques sur les groupements (point **3**), les trois variables aléatoires $F = f(X_1, \dots, X_m)$, $G = g(Y_1, \dots, Y_n)$ et $H = h(Z_1, \dots, Z_p)$ sont indépendantes ; on peut appliquer le théorème précédent.

Exemple : fonction caractéristique d'une somme de v.a. indépendantes

La fonction caractéristique φ_{X} d'une v.a. X est donnée par $\varphi_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{X}}$ pour tout t réel. On a le résultat simple mais important suivant : *si* X *et* Y *sont indépendantes,*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\mathrm{X+Y}}(t) = \varphi_{\mathrm{X}}(t)\varphi_{\mathrm{Y}}(t).$$

Vérification. — On prend, pour un t fixé, $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ et $g(y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty}$; on a

$$\varphi_{\mathrm{X+Y}}(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mathrm{X+Y})} = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{X}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{Y}}\big) = \mathrm{E}\,f(\mathrm{X})g(\mathrm{Y}) = (\mathrm{E}\,f(\mathrm{X}))(\mathrm{E}\,g(\mathrm{Y})).$$

Exercice. Si U est uniforme sur $[-1,1]$, sa loi est $\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\mathrm{d}x/2$ et on trouve pour $t \neq 0$

$$\varphi_{\mathrm{U}}(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{U}} = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\frac{\mathrm{d}x}{2} = \frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{\mathrm{i}t}\Big]_{x=-1}^{1} = \frac{\sin t}{t}.$$

Pour $t = 0$, on trouve toujours $\varphi_{\mathrm{X}}(0) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^0 = 1$, qui est aussi la limite quand t tend vers 0, puisque φ_{X} est continue (continuité sous l'intégrale).

Cette fonction caractéristique n'est pas intégrable,

$$\int_0^{+\infty} \Big|\frac{\sin t}{t}\Big|\,\mathrm{d}t = +\infty\,;$$

mais si $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ sont indépendantes uniformes sur $[-1,1]$, on a

$$\varphi_{\mathrm{U}_1+\mathrm{U}_2}(t) = \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 2. *Les deux variables aléatoires* X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si pour toutes les fonctions* f, g *boréliennes positives sur* $\mathbb{R}$*, on a*

$$(**) \qquad \mathrm{E}\,f(\mathrm{X})g(\mathrm{Y}) = \mathrm{E}\,f(\mathrm{X})\;\mathrm{E}\,g(\mathrm{Y}).$$

Preuve. — On commence par appliquer le corollaire 1 pour montrer que la condition $(**)$ est nécessaire pour avoir l'indépendance. Inversement, on suppose $(**)$ et on prend $f = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}$, $g = \mathbf{1}_{\mathrm{B}}$, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{A})\,\mathrm{P}(\mathrm{Y} \in \mathrm{B}) = \big(\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})\big)\big(\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}}(\mathrm{Y})\big) = \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})\mathbf{1}_{\mathrm{B}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{P}\big((\mathrm{X} \in \mathrm{A})\,\&\,(\mathrm{Y} \in \mathrm{B})\big),$$

d'où le résultat : X et Y sont indépendantes.

VI.3. Techniques de Fourier

Si X est une variable aléatoire, on a posé

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{X}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{dP}_{\mathrm{X}}(x)\,;$$

pour une mesure μ positive bornée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, on définit la *transformée de Fourier* $\widehat{\mu}$ de la mesure μ, qui est une fonction sur $\mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

de sorte que

$$\varphi_{\mathrm{X}}(t) = \widehat{\mathrm{P}}_{\mathrm{X}}(-t).$$

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui est cohérent avec la définition donnée pour les mesures, dans le cas où on a d'un côté une fonction $f \ge 0$ intégrable et de l'autre la mesure $\mathrm{d}\mu(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ dont la densité est la même fonction f,

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}\mu(x) = \widehat{\mu}(t).$$

Si f est nulle en dehors de $[-\pi, \pi]$, on voit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

est 2π fois le coefficient de Fourier $c_n(f_0)$ de la fonction 2π-périodique f_0 sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $[-\pi, \pi]$. Toutes ces transformations sont des formes d'une même technique, la transformation de Fourier. On va envisager certaines des propriétés, en choisissant les mots des probabilistes pour le dire.

Théorème. *La loi* P_{X} *est uniquement déterminée par la fonction caractéristique* φ_{X} *; précisément, pour tous* $a < b$ *réels*

$$\frac{\mathrm{P}(a < \mathrm{X} \le b) + \mathrm{P}(a \le \mathrm{X} < b)}{2} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bu} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}au}}{-\mathrm{i}u}\,\varphi_{\mathrm{X}}(u)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon^2 u^2/2}\,\frac{\mathrm{d}u}{2\pi}.$$

Comme $\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(b)$ est la limite de $\frac{1}{2}\big(\mathrm{P}(-n < \mathrm{X} \le b + 1/n) + \mathrm{P}(-n \le \mathrm{X} < b + 1/n)\big)$ quand $n \to +\infty$, on retrouve bien la fonction de répartition de X, donc la loi de X, à partir de formules qui ne font entrer que la fonction caractéristique φ_{X}.

On verra la preuve la prochaine fois, et on verra un cas particulier plus sympathique à énoncer, quand φ_{X} est intégrable.