cours 25, le lundi 10 mai 2010

Convolution

La convolution est un thème important en analyse, mais on le verra surtout ici, trop rapidement, comme un prétexte à révision de presque tous les théorèmes et notions du cours d'intégration.

Si f et g sont boréliennes ≥ 0 sur $\mathbb{R}$, la fonction $(x, y) \to f(x-y)g(y)$ est borélienne sur $\mathbb{R}^2$; elle est en effet obtenue comme composition de trois applications boréliennes : l'application continue $(x, y) \to (x-y, y)$, le couple borélien $(u, v) \to (f(u), g(v))$ et le produit $(s, t) \to st$, continu de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On posera pour tout x réel

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \in [0, +\infty].$$

On sait d'après l'énoncé du théorème de Fubini (positif) que $x \to \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ est borélienne de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$; par l'invariance de la mesure de Lebesgue (cas élémentaire de changement de variable) on voit que $f*g = g*f$, en posant pour x fixé $u = x-y$,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u = (g * f)(x).$$

On complète l'application de Fubini (positif) avec le calcul de l'intégrale double,

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \Bigr)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}x \Bigr)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(v)\,\mathrm{d}v \Bigr) g(y)\,\mathrm{d}y = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(v)\,\mathrm{d}v \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y \Bigr).$$

En particulier, si f et g sont positives et *intégrables*,

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\,\mathrm{d}x = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(v)\,\mathrm{d}v \Bigr) \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y \Bigr) < +\infty,$$

ce qui entraîne que pour presque tout x,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y < +\infty.$$

Le cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^1$

Quand les deux fonctions f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, on sait pour la même raison que $(x, y) \to f(x-y)g(y)$ est borélienne ; pour appliquer le théorème de Fubini à cette fonction de deux variables, on doit commencer par examiner l'intégrabilité en deux variables, c'est-à-dire la finitude de l'intégrale double

$$\iint |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

qui revient à étudier la convolution $|f| * |g|$ des modules des deux fonctions. D'après le cas ≥ 0 déjà vu,

$$\iint |f(x-y)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} (|f| * |g|)(x)\,\mathrm{d}x = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} |f(v)|\,\mathrm{d}v\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,\mathrm{d}y\Bigr) < +\infty.$$

En appliquant les conclusions du théorème de Fubini, on voit d'abord que pour presque tout x, la fonction

$$y \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x-y)g(y)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, puis que la fonction définie presque partout

$$f * g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$; enfin, $f * g$ est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\,\mathrm{d}x = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(v)\,\mathrm{d}v\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr).$$

En comparant les modules d'intégrales aux intégrales des modules on trouve

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}\,\|g\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R})}.$$

Le cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^p$

Supposons que f, g sont boréliennes positives et $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$; le cas L^p de l'inégalité de Jensen, appliqué à la mesure finie $\mathrm{d}\mu(y) = g(y)\,\mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}$, donne pour tout réel x

$$(f * g)(x)^p = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^p \leq \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^{p-1} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)^p g(y)\,\mathrm{d}y,$$

où on a étendu la fonction convexe $t \to |t|^p$ par $(+\infty)^p = +\infty$. En réintégrant en x, et en appliquant Fubini positif, on voit que

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)^p\,\mathrm{d}x \leq \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^{p-1} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)^p g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^{p-1} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(v)^p\,\mathrm{d}v\Bigr)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr) = \Bigl(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr)^p \Bigl(\int_{\mathbb{R}} f(v)^p\,\mathrm{d}v\Bigr) < +\infty.$$

On obtient à nouveau la conclusion que $(f * g)(x)$ est fini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. On peut aussi écrire la conclusion du calcul précédent comme

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p\,\|g\|_1,$$

au moins dans le cas positif ; on peut passer au cas des valeurs complexes comme avant, en utilisant la majoration par les modules. On obtient ainsi : si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, et si $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction $f * g$ est presque partout définie et appartient à $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, avec

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p\,\|g\|_1.$$

Cas $\mathrm{L}^p * \mathrm{L}^q$, *quand* $1/p + 1/q = 1$
Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, on voit par l'invariance de la mesure de Lebesgue que pour tout x,

$$y \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x-y)$$

est dans L^p, et par Hölder, si la fonction g est dans $\mathrm{L}^q(\mathbb{R})$, on a pour tout x l'intégrabilité de $y \to f(x-y)g(y)$ et la majoration

$$|(f*g)(x)| = \Bigl|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\Bigr| \le \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

La fonction $f * g$ est donc définie pour tout x, et elle est bornée sur $\mathbb{R}$,

$$\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

On peut montrer que dans le cas présent, $f * g$ est non seulement bornée, mais *continue* bornée.

Continuité et dérivabilité

Théorème. *Si f est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et si $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la convolée $f * g$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. — Cela résulte du théorème de continuité des intégrales à paramètre. En effet, si on pose $h(x,y) = f(x-y)g(y)$ et

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

on a que $x \to h(x,y)$ est continue, et puisque f est supposée bornée,

$$|h(x,y)| = |f(x-y)|\,|g(y)| \le \|f\|_\infty\,|g(y)|,$$

majoration par une fonction intégrable indépendante du paramètre x.

Théorème (dérivabilité). *Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, si f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et si $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la convolée $f * g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et*

$$(f*g)' = f' * g.$$

Preuve. — On utilise cette fois le théorème de dérivation, pour la même intégrale

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\,\mathrm{d}y\,;$$

on a maintenant que pour tout y fixé,

$$x \to \frac{\partial}{\partial x}h(x,y) = f'(x-y)g(y)$$

existe et est continue, admet un majorant intégrable

$$\Bigl|\frac{\partial}{\partial x}h(x,y)\Bigr| \le \|f'\|_\infty\,|g(y)|,$$

ce qui permet de dire que F est de classe C^1 avec

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} h(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f'(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = (f' * g)(x).$$

Remarque. Si g est dérivable aussi, et si les hypothèses convenables sont satisfaites (aux hypothèses précédentes sur f, ajouter f' intégrable, g de classe C^1 avec g, g' bornées), on peut calculer la dérivée seconde de $f * g$ par la formule

$$(f * g)'' = f' * g'.$$

Il y a potentiellement trois façons de calculer la dérivée seconde, qui n'ont pas toujours un sens : $f'' * g$, $f' * g'$ et $f * g''$.

Cas des fonctions C^∞ à support compact : si f est de classe C^∞ à support compact, il en est de même pour toutes les dérivées successives $f^{(k)}$. Comme f et f' sont continues à support compact, f et f' sont bornées ; si $g \in L^1(\mathbb{R})$ on a vu que $f * g$ est alors de classe C^1 et

$$(f * g)' = f' * g.$$

Mais maintenant la convolution $f' * g$ est à nouveau la convolution d'une fonction f' de classe C^∞ avec une fonction g de L^1, ce qui permet de continuer par récurrence. On obtient que $f * g$ est de classe C^∞ et pour tout entier $k \geq 1$,

$$(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g.$$

Approximation

Si g est une fonction ≥ 0 intégrable sur $\mathbb{R}$, d'intégrale 1, on posera pour tout entier $n \geq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = ng(nx).$$

Par changement de variable, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} ng(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(v)\,\mathrm{d}v = 1,$$

et par ailleurs pour tout $\delta > 0$ on a

$$(*) \qquad \int_{|y|\geq\delta} g_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{|v|\geq n\delta} g(v)\,\mathrm{d}v \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

par convergence dominée : en effet,

$$h_n(v) = \mathbf{1}_{\{|v|\geq n\delta\}}\, g(v)$$

tend simplement vers 0 (si v est fixé, on a pour n assez grand $|v| < n\delta$ puisque $\delta > 0$), et

$$|h_n(v)| \leq |g(v)|$$

qui est intégrable.

Théorème. *Si f est uniformément continue bornée sur $\mathbb{R}$ (on écrira en abrégé que la fonction f est UCB), les convolées $f * g_n$ convergent vers f, uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. — On a en effet
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g_n(y) \, \mathrm{d}y,$$
donc
$$(f * g_n)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(f(x-y) - f(x) \big) g_n(y) \, \mathrm{d}y,$$
et on va découper cette intégrable en deux pour la majorer par deux principes distincts : si y est petit, la parenthèse $f(x-y) - f(x)$ est petite par continuité uniforme ; quand $|y| \geq \delta$, on utilise $(*)$.

Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\big(|y| < \delta \big) \;\Rightarrow\; \big(|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \big) \, ;$$
il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique
$$\int_{|y| \geq \delta} g_n(y) \, \mathrm{d}y = \int_{|v| \geq n\delta} g(v) \, \mathrm{d}v < \varepsilon.$$
On écrit, pour x quelconque et $n \geq 0$,
$$\big| (f * g_n)(x) - f(x) \big| \leq \int_{|y| < \delta} \big| f(x-y) - f(x) \big| g_n(y) \, \mathrm{d}y + \int_{|y| \geq \delta} \big| f(x-y) - f(x) \big| g_n(y) \, \mathrm{d}y$$
$$\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} g_n(y) \, \mathrm{d}y + 2 \|f\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} g_n(y) \, \mathrm{d}y \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \varepsilon.$$
On a donc prouvé que pour $n \geq n_0$,
$$\|f * g_n - f\|_\infty \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \varepsilon.$$

Théorème (cas L^p). *Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, la suite $f * g_n$ converge dans L^p vers f,*
$$\|f * g_n - f\|_p \longrightarrow 0.$$

Esquisse. — Pour obtenir ce résultat on utilise la densité dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact : on peut trouver f_1 continue à support compact telle que $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$. En modifiant ce qui précède, on trouve que
$$\|f_1 * g_n - f_1\|_p \longrightarrow 0.$$
Pour n assez grand, on aura
$$\|f_1 * g_n - f_1\|_p < \varepsilon$$
et par ailleurs
$$\|f * g_n - f_1 * g_n\|_p = \|(f - f_1) * g_n\|_p \leq \|f - f_1\|_p \, \|g_n\|_1 < \varepsilon,$$
donc $\|f * g_n - f\|_p < 3\varepsilon$.

Théorème d'approximation de Weierstrass

Définition. Une *fonction entière* est une fonction f qui est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini : il existe des coefficients $(a_k)_{k\geqslant 0}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

On peut étendre naturellement une telle fonction f au plan complexe en remplaçant x réel par $z \in \mathbb{C}$ dans la série entière précédente. Les exemples habituels sont e^z, $\sin(z)$, etc., et ici on utilisera la fonction entière

$$\mathrm{e}^{-x^2/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k k!}.$$

Théorème. *Si f est UCB sur $\mathbb{R}$, elle est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions entières.*

Preuve. — On pose

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

et on définit $g_n(x) = ng(nx)$ comme avant. On a prouvé que $f * g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, il ne reste qu'à montrer que $f * g_n$ est entière. On obtient ce résultat (qu'on a presque déjà vu dans le cours) en développant l'exponentielle en série et en intervertissant intégrale et série par la version série du théorème de convergence dominée. Montrons le cas $n = 1$ où la notation est un peu plus simple. On a $g_1 = g$ et

$$\sqrt{2\pi}\,(f * g_1)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-(x-y)^2/2}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-x^2/2} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{xy-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

D'après le théorème sur le produit des séries entières, le produit de deux fonctions entières est une fonction entière ; il suffit donc de prouver que

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{xy-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

est entière. Pour cela on développe e^{xy} en série entière,

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k y^k}{k!}\Big)\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

et on montre que l'interversion est permise, par la version séries du théorème de convergence dominée (la somme de la série des fonctions valeurs absolues,

$$y \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |f(y)|\,\frac{|x|^k |y|^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-y^2/2} = |f(y)|\,\mathrm{e}^{|xy|-y^2/2} \leq \|f\|_\infty\,\mathrm{e}^{|xy|-y^2/2}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$). Finalement, comme l'interversion est possible pour tout x, on obtient que

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{y^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\Big) x^k$$

est une fonction entière.

Corollaire. *Si f est continue sur $[a,b]$, on peut l'approcher uniformément sur $[a,b]$ par des fonctions polynomiales.*

Preuve. — On prolonge f en fonction f_1 UCB sur $\mathbb{R}$ en posant $f_1(x) = f(a)$ si $x \leq a$ et $f_1(x) = f(b)$ si $x \geq b$. D'après le théorème précédent, on trouve une fonction entière

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

telle que $|f_1 - \varphi| < \varepsilon$ sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[a,b]$ on a $|f - \varphi| = |f_1 - \varphi| < \varepsilon$; sur $[a,b]$, la fonction entière φ est approchée uniformément par les sommes partielles

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

de la série qui la représente, et S_n est polynomiale. Ainsi, pour n assez grand, la fonction polynomiale S_n vérifie $|\mathrm{S}_n - f| < 2\varepsilon$ sur $[a,b]$.