cours 5, le jeudi 11 février 2010

Positive-linéarité de l'intégrale des fonctions étagées ≥ 0

Si on a deux partitions de X en ensembles (A_j) et (B_k) appartenant à la tribu $\mathcal{F}$, on a vu qu'on peut construire une partition plus fine en considérant les ensembles $\mathrm{A}_j \cap \mathrm{B}_k$. Si on a deux fonctions $\mathcal{F}$-étagées φ et ψ, on peut donc trouver une partition C_ℓ telle que les deux fonctions φ et ψ soient constantes sur les ensembles de cette partition, ce qui permet d'écrire

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \mathbf{1}_{\mathrm{C}_\ell}, \quad \psi = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \mathbf{1}_{\mathrm{C}_\ell}.$$

Par conséquent, si α, β sont réels ≥ 0, on a

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{\ell=1}^{n} (\alpha a_\ell + \beta b_\ell) \mathbf{1}_{\mathrm{C}_\ell},$$

et si $\varphi, \psi \ge 0$, on peut calculer l'intégrale de $\alpha\varphi + \beta\psi$ en utilisant cette partition

$$\int_{\mathrm{X}} (\alpha\varphi + \beta\psi) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{\ell=1}^{n} (\alpha a_\ell + \beta b_\ell) \mu(\mathrm{C}_\ell) = \alpha \int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_{\mathrm{X}} \psi \,\mathrm{d}\mu.$$

De plus l'intégrale est croissante : si $0 \le \varphi \le \psi$, alors $a_\ell \le b_\ell$ pour tous les ensembles non vides C_ℓ et dans ce cas $a_\ell \mu(\mathrm{C}_\ell) \le b_\ell \mu(\mathrm{C}_\ell)$; quand C_ℓ est vide, la mesure de C_ℓ est nulle et $a_\ell \mu(\mathrm{C}_\ell) = 0 = b_\ell \mu(\mathrm{C}_\ell)$, donc

$$0 \le \varphi \le \psi \ \Rightarrow\ \int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu \le \int_{\mathrm{X}} \psi \,\mathrm{d}\mu.$$

Remarque. Dans le cas où $\mathrm{X} = [a, b]$, où $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ (tribu borélienne de $[a, b]$) et $\mu = \lambda$ (la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$), les fonctions en escalier sont $\mathcal{B}$-étagées, et elles ont reçu la même intégrale dans la théorie de Riemann et dans la théorie en construction.

II.2.2. *Intégrale des fonctions mesurables positives*

On suppose qu'on a donné un *espace mesuré* $(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$, consistant en un ensemble X, une tribu $\mathcal{F}$ de parties de X et une mesure μ sur $\mathcal{F}$ (toujours σ-additive, à valeurs dans l'ensemble $[0, +\infty]$, sauf mention contraire).

Définition. Si f est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable sur X, à valeurs dans $[0, +\infty]$, on définit son *intégrale sur* X *par rapport à* μ, notée $\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu$, en posant

$$\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu = \sup \Bigl\{ \int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu : 0 \le \varphi \le f,\ \varphi \text{ étagée} \Bigr\}.$$

On peut toujours prendre $\varphi = 0$ comme fonction étagée plus petite que $f \ge 0$, donc l'intégrale de f est ≥ 0 ; le sup peut être égal à $+\infty$, par exemple si $\mu(\mathrm{X}) > 0$ et si f est égale à $+\infty$ en tout point ; en résumé

$$\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty].$$

La monotonie de l'intégrale est évidente : si $0 \le f \le g$, alors

$$0 \le \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu \le \int_{\mathrm{X}} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Remarque. Si f est $\mathcal{B}$-mesurable ≥ 0 et R-intégrable sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda.$$

En effet, comme il y a plus de fonctions étagées que de fonctions en escalier, la « nouvelle intégrale », notée $\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda$, est supérieure ou égale à l'intégrale de Riemann de f, qui est le sup des intégrales des fonctions en escalier plus petites que f,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda\,;$$

mais si on fixe une fonction en escalier ψ_2 telle que $f \leq \psi_2$, on aura pour toute fonction $\mathcal{B}$-étagée $\varphi \leq f$:

$$\varphi \leq \psi_2 \Rightarrow \int_{\mathrm{X}} \varphi\,\mathrm{d}\lambda \leq \int_{\mathrm{X}} \psi_2\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \psi_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc en passant au sup sur les $\varphi \leq f$ étagées

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda \leq \int_a^b \psi_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

et en prenant l'inf sur $\psi_2 \geq f$ en escalier, on obtient la deuxième inégalité, qui donne l'égalité cherchée.

Restriction

Cette section discute quelques pinaillages qu'il vaudra mieux laisser de côté dans un premier temps. Supposons que $(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ soit un espace mesuré ; si $\mathrm{X}^* \in \mathcal{F}$ est un sous-ensemble de X, on peut définir un nouvel espace mesuré $(\mathrm{X}^*, \mathcal{F}^*, \mu^*)$ en *restreignant* toutes les données de X au sous-ensemble : la tribu $\mathcal{F}^*$ est une tribu de parties de X^*, formée de tous les $\mathrm{A}^* \in \mathcal{F}$ tels que $\mathrm{A}^* \subset \mathrm{X}^*$; la mesure μ^* est définie sur la tribu $\mathcal{F}^*$ en posant $\mu^*(\mathrm{A}^*) = \mu(\mathrm{A}^*)$ pour tout ensemble $\mathrm{A}^* \in \mathcal{F}^*$.

Si f est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable sur X, à valeurs dans $[0, +\infty]$, on peut considérer sa restriction f^* à X^* : il s'agit de la fonction qui n'est définie *que sur* X^*, et qui vaut $f(x^*)$ pour tout point x^* de X^*. La fonction f^* est $\mathcal{F}^*$-mesurable, puisque pour tout c réel on a $\{f^* > c\} = \mathrm{X}^* \cap \{f > c\}$, qui est un ensemble de $\mathcal{F}$ contenu dans X^*, donc un ensemble de $\mathcal{F}^*$.

Remarque R. *Si* $f : \mathrm{X} \to [0, +\infty]$ *est* $\mathcal{F}$*-mesurable et nulle en dehors de* X^**, on a*

$$\int_{\mathrm{X}^*} f^*\,\mathrm{d}\mu^* = \int_{\mathrm{X}} f\,\mathrm{d}\mu.$$

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ est un sous-ensemble de X^*, la notation $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ devient ambiguë dans notre situation : on n'est pas sûr de savoir s'il s'agit de la fonction sur X ou de la fonction sur X^* ; dans la suite de ce paragraphe, on choisira de dire que $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ désigne la fonction sur X, égale à 1 sur A et à 0 dans $\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}$, et on notera $\mathbf{1}^*_{\mathrm{A}}$ la fonction sur X^*, qui est à la fois la restriction de $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ à X^*, et l'indicatrice de A comme sous-ensemble de X^*.

Preuve de la remarque R. — Si φ est une fonction $\mathcal{F}$-étagée ≥ 0 sur X, qui est nulle en dehors de X^*, on peut écrire

$$\varphi = 0.\mathbf{1}_{\mathrm{X}^*\setminus\mathrm{X}} + \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k},$$

où (A_k) est une partition de X^* en ensembles de $\mathcal{F}^*$. La restriction φ^* peut s'écrire

$$\varphi^* = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k \mathbf{1}^*_{\mathrm{A}_k}.$$

On vérifie que les intégrales de φ et φ^* sont les mêmes,

$$(*) \qquad \int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu = 0 + \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k \mu(\mathrm{A}_k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k \mu^*(\mathrm{A}_k) = \int_{\mathrm{X}^*} \varphi^* \,\mathrm{d}\mu^*.$$

Pour terminer la vérification, il faut utiliser le fait suivant : les fonctions $\mathcal{F}^*$-étagées ≥ 0 sur X^* plus petites que f^* sont exactement les restrictions φ^* des fonctions $\mathcal{F}$-étagées $\varphi \geq 0$ sur X qui sont plus petites que f. D'après l'égalité $(*)$, il résulte de ce fait que l'intégrale de f^* et celle de f sont obtenues comme sup du même ensemble de nombres,

$$\Big\{ \int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu : 0 \leq \varphi \leq f \Big\} = \Big\{ \int_{\mathrm{X}^*} \varphi^* \,\mathrm{d}\mu^* : 0 \leq \varphi^* \leq f^* \Big\},$$

donc les intégrales de f et f^* sont égales. Le *fait* mentionné ci-dessus comporte une direction évidente : si φ est $\mathcal{F}$-étagée sur X et si $0 \leq \varphi \leq f$, alors $0 \leq \varphi^* \leq f^*$. Inversement, si ψ est $\mathcal{F}^*$-étagée sur X^* et $0 \leq \psi \leq f^*$, on peut écrire

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{1}^*_{\mathrm{B}_j}$$

où (B_j) est une partition de X^* en ensembles de $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$. On constate que ψ est la restriction de

$$\varphi = 0.\mathbf{1}_{\mathrm{X}^*\setminus\mathrm{X}} + \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j},$$

qui est $\mathcal{F}$-étagée sur X et telle que $0 \leq \varphi \leq f$.

II.2.3. *Théorème de convergence monotone*

Le premier théorème important de convergence des intégrales concerne les suites croissantes de fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$, c'est-à-dire les suites (f_n) de fonctions sur X telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathrm{X}, \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq +\infty.$$

Comme on travaille avec des valeurs dans $[0, +\infty]$, toute suite croissante admet une limite et on peut poser pour tout $x \in \mathrm{X}$

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \in [0, +\infty].$$

La limite est aussi le sup de la suite des valeurs, et en particulier on a $f_n \leq f$ pour tout n. Quand les fonctions f_n sont $\mathcal{F}$-mesurables, on a vu que la limite (simple) f est elle aussi $\mathcal{F}$-mesurable.

Théorème de convergence monotone. *Si* $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *est une suite croissante de fonctions* $\mathcal{F}$*-mesurables sur* X*, à valeurs dans* $[0, +\infty]$*, et si* $f = \lim_n f_n$ *désigne la limite simple, on a*

$$\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve. — Puisque $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n, on a $\int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\mathrm{X}} f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu$, donc la suite des intégrales est croissante et admet une limite dans $[0, +\infty]$. Puisque $f_n \leq f$, il est clair que $\int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu$ pour tout n, ce qui donne l'inégalité dans un sens,

$$\lim_n \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Inversement, on va fixer pour un bon moment une fonction φ qui est $\mathcal{F}$-étagée et telle que $0 \leq \varphi \leq f$, qu'on peut écrire

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k},$$

où les $\mathrm{A}_k \in \mathcal{F}$ sont deux à deux disjoints, et où on n'a gardé dans la représentation que les $a_k > 0$ (sinon ils ne contribuent pas à la valeur de φ). On introduit un nombre τ tel que $0 < \tau < 1$, qu'on fera ensuite tendre vers 1 ; on a ainsi $0 < \tau a_k < a_k$ pour tout $k = 1, \ldots, \mathrm{K}$; on pose pour tout n

$$\mathrm{A}_{k,n} = \{x \in \mathrm{A}_k : f_n(x) > \tau a_k\} = \mathrm{A}_k \cap \{f_n > \tau a_k\} \in \mathcal{F}, \quad \text{et} \quad \varphi_n^* = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \tau a_k \mathbf{1}_{\mathrm{A}_{k,n}}.$$

On vérifie que

$$\varphi_n^* \leq f_n.$$

Comme la suite (f_n) est croissante, la suite d'ensembles $(\mathrm{A}_{k,n})$ est croissante en n et comme pour tout $x \in \mathrm{A}_k$, on a $f(x) \geq \varphi(x) = a_k > \tau a_k$, la valeur $f_n(x)$, qui tend vers $f(x)$, finit par dépasser τa_k, donc x est dans $\mathrm{A}_{k,n}$ pour n assez grand, ce qui montre que

$$\mathrm{A}_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_{k,n}.$$

Il résulte des axiomes de la mesure (monotonie) que pour chaque k fixé,

$$\mu(\mathrm{A}_{k,n}) \to \mu(\mathrm{A}_k), \quad \text{donc} \ \ \tau a_k \mu(\mathrm{A}_{k,n}) \to \tau a_k \mu(\mathrm{A}_k)$$

quand n tend vers l'infini ; pour chaque n on a, puisque $\varphi_n^* \leq f_n$ est étagée,

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \tau a_k \mu(\mathrm{A}_{k,n}) = \int_{\mathrm{X}} \varphi_n^* \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu$$

donc en prenant la limite en n des deux côtés,

$$\tau \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k \mu(\mathrm{A}_k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \tau a_k \mu(\mathrm{A}_k) \leq \lim_n \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Faisant tendre τ vers 1 en croissant, on obtient par un deuxième passage à la limite,

$$\int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} a_k \mu(\mathrm{A}_k) \leq \lim_n \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Prenant le sup en $\varphi \leq f$, on obtient l'inégalité manquante.

$$\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu \leq \lim_n \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

« *Posi-linéarité* »
Soient f, g deux fonctions $\mathcal{F}$-mesurables sur X, à valeurs dans $[0, +\infty]$; on a vu qu'il existe φ_n, ψ_n $\mathcal{F}$-étagées ≥ 0 qui tendent en croissant vers f, g.

Si α, β sont tels que $0 \leq \alpha, \beta < +\infty$, la suite $\alpha\varphi_n + \beta\psi_n$ tend en croissant vers $\alpha f + \beta g$; on en déduit d'abord que $\alpha f + \beta g$ est $\mathcal{F}$-mesurable, et par le théorème de convergence monotone,

$$\int_{\mathrm{X}} (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_{\mathrm{X}} (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) \,\mathrm{d}\mu$$

$$= \alpha \lim_n \int_{\mathrm{X}} \varphi_n \,\mathrm{d}\mu + \beta \lim_n \int_{\mathrm{X}} \psi_n \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_{\mathrm{X}} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Résumé. *Soient f, g deux fonctions $\mathcal{F}$-mesurables sur X, à valeurs dans $[0, +\infty]$; alors $\alpha f + \beta g$ est $\mathcal{F}$-mesurable et on a*

$$\int_{\mathrm{X}} (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_{\mathrm{X}} g \,\mathrm{d}\mu,$$

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\mathrm{X}} g \,\mathrm{d}\mu.$$

Rapport avec l'intégrale de Riemann généralisée
Corollaire. *Si la fonction $f : [a, c[\to [0, +\infty[$ est $\mathcal{B}$-mesurable ≥ 0, et a une intégrale de Riemann généralisée convergente sur $[a, c[$, alors l'intégrale généralisée de la théorie de Riemann coïncide avec l'intégrale de Lebesgue,*

$$\int_a^c f(t) \,\mathrm{d}t = \int_{[a,c[} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Preuve. — Dire que l'intégrale généralisée est convergente présuppose que f soit R-intégrable sur les intervalles $[a, b]$ tels que $a \leq b < c$. Choisissons une suite (b_n) qui tende en croissant vers c, avec $a \leq b_n < c$ pour tout n. Posons

$$f_n = \mathbf{1}_{[a,b_n]} f \,;$$

cette fonction f_n est $\mathcal{B}$-mesurable ≥ 0 et R-intégrable sur $[a, b_n]$. On a vu que dans ce cas

$$\int_{[a,b_n]} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^{b_n} f_n(t) \,\mathrm{d}t.$$

Comme f_n est nulle en dehors de $[a, b_n]$, on a

$$\int_{[a,c[} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b_n]} f_n \,\mathrm{d}\lambda$$

(voir la remarque **R** si on veut absolument des détails). Par conséquent,

$$\int_{[a,c[} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^{b_n} f_n(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^{b_n} f(t) \,\mathrm{d}t$$

puisque f_n est égale à f entre a et b_n. On voit de plus que la suite (f_n) tend simplement vers f sur $[a, c[$, et en croissant. Par le théorème de convergence monotone,

$$\int_{[a,c[} f \,\mathrm{d}\lambda = \lim_n \int_{[a,c[} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \lim_n \int_a^{b_n} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \,\mathrm{d}t.$$

Corollaire : convergence monotone, version série de fonctions. *Si on a une suite* (u_n) *de fonctions* $\mathcal{F}$*-mesurables sur* X, *à valeurs dans* $[0, +\infty]$, *on peut intervertir série et intégrale,*

$$\int_{\mathrm{X}} \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Bigr) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigl(\int_{\mathrm{X}} u_n \,\mathrm{d}\mu\Bigr).$$

Preuve. — La suite des fonctions $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ tend en croissant vers la fonction S somme de la série, $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, et l'intégrale est additive. On a donc pour tout n

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{S}_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathrm{X}} u_k \,\mathrm{d}\mu\,;$$

par le théorème de convergence monotone,

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{S} \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_{\mathrm{X}} \mathrm{S}_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathrm{X}} u_k \,\mathrm{d}\mu,$$

qui est, par définition de la somme d'une série numérique, la somme de la série des intégrales.

Exemple-Exercice. Exprimer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} \,\mathrm{d}x$$

sous forme d'une série numérique « classique ».

Solution. — Pour $0 \leq y < 1$, on considère sur l'intervalle $\mathrm{X} = [0, y]$ les fonctions positives $u_n(t) = t^n$. On aura par le dernier corollaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y t^n \,\mathrm{d}t = \int_0^y \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\Bigr) \,\mathrm{d}t = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-y).$$

Dans l'intégrale proposée en exemple, le changement de variable $y = 1 - x$ conduit à

$$\int_0^1 \frac{-\ln(1-y)}{y} \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}\Bigr) \,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{y^n}{n+1} \,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \ \Bigl(= \frac{\pi^2}{6}\Bigr).$$

Lemme de Fatou

Considérons une suite (f_n) de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables sur X, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$; pour tout entier n, on peut considérer l'inf de la famille dénombrable des $f_k, k \ge n$; la valeur existe dans la droite achevée (peut-être $-\infty$), et on a vu que la fonction

$$g_n = \inf_{k \ge n} f_k$$

est $\mathcal{F}$-mesurable ; dans un deuxième temps, on peut observer que $g_n \le g_{n+1}$ pour tout n (l'inf sur une famille moins grande de possibilités est plus grand), et prendre la limite croissante de cette suite, qui sera, à nouveau, une fonction $\mathcal{F}$-mesurable. C'est la fonction $\liminf_n f_n$, qui est définie par

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad (\liminf_n f_n)(x) = \liminf_n f_n(x) = \lim_n \nearrow \big(\inf_{k \ge n} f_k(x)\big).$$

Quand la suite (f_n) admet une limite simple (limite ponctuelle) f, on a $\liminf_n f_n = f$. On définit de façon similaire la fonction lim sup,

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad (\limsup_n f_n)(x) = \limsup_n f_n(x) = \lim_n \searrow \big(\sup_{k \ge n} f_k(x)\big).$$

On pourra noter que

$$\limsup_n f_n = -\liminf_n (-f_n).$$

Théorème (lemme de Fatou). *Si* (f_n) *est une suite de fonctions* $\mathcal{F}$*-mesurables sur* X *à valeurs dans* $[0, +\infty]$*, on a*

$$\int_{\mathrm{X}} \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_n \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve. — Posons pour tout n

$$g_n = \inf_{k \ge n} f_k \le f_n \,;$$

cette fonction g_n est $\mathcal{F}$-mesurable, et elle tend en croissant vers $\mathrm{G} = \liminf_n f_n$; on a donc par le théorème de convergence monotone

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{G} \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_{\mathrm{X}} g_n \,\mathrm{d}\mu = \liminf_n \int_{\mathrm{X}} g_n \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_n \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Exemple où l'inégalité est stricte : sur $]0, 1]$, posons $f_n = n\mathbf{1}_{[0,1/n]}$, $n \ge 1$.
La limite simple des f_n existe sur $]0, 1]$, et vaut 0, égale à $\liminf_n f_n$. Dans le lemme de Fatou, l'intégrale de gauche vaut ici 0 alors que celles de droite sont toutes égales à 1.

En considérant les fonctions $-f_n$ on voit aussi que le résultat est **faux** sans une restriction du type $f_n \ge 0$ (qu'on pourra adoucir plus loin en une restriction de minoration $f_n \ge g$ de la suite par une fonction g, peut-être négative, mais *intégrable*).