cours 6, le lundi 15 février 2010

Inégalité de Markov

Elle est aussi appelée de Tchebychev, de Bienaymé-Tchebychev (prouvée vers 1869), mais si l'idée en est la même, elle n'est pas exactement celle de Markov, qui est ultérieure et donne le principe extrêmement simple et général, qui est (en renversant le cours de l'histoire) à l'origine de celle de Bienaymé-Tchebychev.

Lemme. *Soit f une fonction $\mathcal{F}$-mesurable sur* X, *à valeurs dans* $[0, +\infty]$; *pour tout nombre réel $a > 0$, on a*

$$\mu\bigl(\{f \ge a\}\bigr) \le \frac{1}{a} \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve. — Considérons l'ensemble $\mathrm{A} = \{f \ge a\}$; on sait que $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ et on remarque que la fonction $\mathcal{F}$-étagée $\varphi = a\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ vérifie l'inégalité

$$\varphi = a\mathbf{1}_{\mathrm{A}} \le f \,;$$

en effet, si $x \in \mathrm{A}$ on a $f(x) \ge a = \varphi(x)$, et si $x \notin \mathrm{A}$ on a $\varphi(x) = 0 \le f(x)$; il résulte de l'inégalité $\varphi \le f$ que

$$a\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu \le \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu,$$

« ce qu'il fallait démontrer ».

Corollaire 1. *Si $f \ge 0$ et $\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu = 0$, alors*

$$\mu\bigl(\{f \ne 0\}\bigr) = \mu\bigl(\{f > 0\}\bigr) = 0.$$

Si $\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, alors

$$\mu\bigl(\{f = +\infty\}\bigr) = 0.$$

Preuve. — Si l'intégrale de f est nulle, on obtient par Markov, pour tout $a > 0$,

$$\mu\bigl(\{f \ge a\}\bigr) \le \frac{1}{a} \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

donc la mesure de $\{f \ge a\}$ est nulle ; on applique ceci successivement à $a_n = 2^{-n}$, pour tout entier $n \ge 0$, et on remarque la formule de réunion suivante : on a

$$\bigcup_n \{f \ge 2^{-n}\} = \{f > 0\} = \{f \ne 0\},$$

qui est donc de mesure nulle comme union dénombrable d'ensembles de mesure nulle, ce qui termine ce premier cas.

Si l'intégrale de f est finie, on applique Markov avec $a = n$ entier > 0 pour obtenir

$$\mu\bigl(\{f = +\infty\}\bigr) \le \mu\bigl(\{f \ge n\}\bigr) \le \frac{1}{n} \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu,$$

majorant qui peut être rendu arbitrairement petit, d'où le résultat.

Remarque. Si l'intégrale de f est finie, on a

$$\int_{\mathrm{X}} \mathbf{1}_{\{f=+\infty\}} f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

En effet, l'ensemble $\mathrm{N} = \{f = +\infty\}$ est de mesure nulle ; toute fonction étagée φ telle que $0 \le \varphi \le \mathbf{1}_{\mathrm{N}} f$ est nulle en dehors de N, donc l'ensemble des points où φ est non nulle est de mesure nulle ; si on exprime φ sous la forme $\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$, où A_j est une partition, on note que $a_j \mu(\mathrm{A}_j) = 0$ pour tout j : soit parce que la valeur a_j est nulle, soit, quand $a_j \neq 0$, parce que la mesure $\mu(\mathrm{A}_j)$ d'un ensemble A_j où φ prend une valeur non nulle est nulle (si $a_j \neq 0$, on aura $\mathrm{A}_j \subset \mathrm{N}$). On a donc $\int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu = 0$, pour toute $\varphi \le \mathbf{1}_{\mathrm{N}} f$, d'où le résultat.

Exemple. On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 |x - r_n|} \in [0, +\infty],$$

où $(r_n)_{n \geqslant 1}$ est une énumération des rationnels. Il est très difficile (et même impossible si on n'a pas indiqué *comment* on a énuméré) de dire en quels points x cette fonction est finie. Néanmoins

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-n^2|x-r_n|} \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2|x-r_n|} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2|y|} \,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 y} \,\mathrm{d}y = \frac{2}{n^2},$$

et d'après la version séries du théorème de convergence monotone,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \,\mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-n^2|x-r_n|} \,\mathrm{d}\lambda(x) < +\infty.$$

Il en résulte que l'ensemble

$$\mathrm{N} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = +\infty\} \in \mathcal{B}$$

est de mesure nulle : il y a vraiment *beaucoup* de points x en lesquels la série qui définit $f(x)$ a une somme finie. On dit qu'une propriété des points de la droite est vraie (Lebesgue) *presque partout* quand l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est contenu dans un borélien de mesure (de Lebesgue) nulle. Ainsi, la série qui définit $f(x)$ converge presque partout.

Fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$; on rappelle que la fonction

$$\limsup_n f_n = \lim_n \Bigl(\sup_{k \ge n} f_k\Bigr)$$

est obtenue par des opérations qui préservent la mesurabilité, le sup dénombrable et $\lim_n$, qui est une limite d'une suite décroissante, donc un inf dénombrable. Si $\ell = \lim_n f_n(x)$

existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, supposons d'abord que ℓ soit réel, et soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier n_0 tel que

$$\ell - \varepsilon < f_k(x) < \ell + \varepsilon$$

pour tout $k \geq n_0$, donc pour tout $n \geq n_0$ on a $\ell - \varepsilon \leq \sup_{k \geq n} f_k(x) \leq \ell + \varepsilon$, ce qui entraîne le même encadrement pour $\limsup_n f_n(x)$, et comme ε est arbitraire, on conclut que $\limsup_n f_n(x) = \ell = \lim_n f_n(x)$.

Si la limite est $-\infty$, on écrit que pour tout $\mathrm{A} > 0$, il existe n_0 tel que pour $k \geq n_0$

$$f_k(x) < -\mathrm{A},$$

ce qui implique $\liminf_n f_n(x) \leq -\mathrm{A}$, pour tout A, donc dans ce cas on conclut que $\limsup_n f_n(x) = -\infty = \ell = \lim_n f_n(x)$ à nouveau. Le cas d'une limite $+\infty$ est analogue. Dans tous les cas on constate que quand la limite simple existe, elle est égale à lim sup (et aussi à lim inf), donc

Si une suite (f_n) de fonctions $\mathcal{F}$-mesurables tend simplement vers une fonction f, cette fonction limite est $\mathcal{F}$-mesurable.

Une fonction $\mathcal{F}$-étagée réelle est une fonction $\varphi : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, de la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i},$$

où les a_i sont dans $\mathbb{R}$ et les A_i dans $\mathcal{F}$ forment une partition de X. Si φ, ψ sont deux fonctions étagées réelles, on peut supposer qu'on a raffiné la partition de sorte que ψ puisse s'exprimer avec *la même partition* que celle utilisée pour φ, sous la forme

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} b_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}.$$

Si $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, il est clair que la fonction $\mathrm{F}(\varphi, \psi) : x \to \mathrm{F}(\varphi(x), \psi(x))$ est $\mathcal{F}$-étagée, puisqu'elle admet la représentation

$$\mathrm{F}(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{F}(a_i, b_i) \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}.$$

Proposition. *Une fonction f de* X *dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{F}$-mesurable si et seulement s'il existe une suite (φ_n) de fonctions $\mathcal{F}$-étagées qui tend simplement vers f ; on peut supposer que $|\varphi_n| \leq |f|$ pour tout n.*

Preuve. — On écrit

$$f = f^+ - f^-,$$

où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$ sont $\mathcal{F}$-mesurables positives. On a vu qu'il existe une suite $(\varphi_{n,1})$ de fonctions $\mathcal{F}$-étagées ≥ 0 qui tend vers f^+ en croissant, et de même il existe une suite $(\varphi_{n,2})$ pour f^- ; alors $\varphi_n = \varphi_{n,1} - \varphi_{n,2}$ est $\mathcal{F}$-étagée pour tout n, et tend simplement vers f (car on n'a jamais $+\infty$ et $-\infty$ en même temps dans l'expression $f^+(x) - f^-(x)$; bien sûr on n'a plus le caractère croissant pour la suite (φ_n) maintenant) ; la majoration $|\varphi_n| \leq |f|$ est claire pour ce choix particulier des φ_n,

$$|\varphi_n| = |\varphi_{n,1} - \varphi_{n,2}| \leq \varphi_{n,1} + \varphi_{n,2} \leq f^+ + f^- = |f|.$$

Conséquence. *Si f, g sont mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $f+g$, fg, $-f$, $\max(f, g)$, $|f|$, f^+, f^-, $\alpha f+\beta g$, etc., sont $\mathcal{F}$-mesurables. Plus généralement, si $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle* continue, *la fonction $x \in \mathrm{X} \to \mathrm{F}(f(x), g(x))$ est $\mathcal{F}$-mesurable.*

Preuve. — Il suffit de vérifier l'énoncé général avec $\mathrm{F}(f, g)$. On trouve (φ_n) et (ψ_n) étagées qui tendent simplement vers f et g. Comme F est continue, les fonctions étagées $\mathrm{F}(\varphi_n, \psi_n)$ tendent simplement vers $\mathrm{F}(f, g)$, qui est donc $\mathcal{F}$-mesurable.

II.2.4. *Intégrale de fonctions réelles*

Définition. On dit qu'une fonction $\mathcal{F}$-mesurable réelle $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ est intégrable par rapport à μ si $\int_{\mathrm{X}} |f| \,\mathrm{d}\mu$ est finie.

Si f est la différence $f_1 - f_2$ de deux fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty[$ (infini exclus ; pour changer) d'intégrale finie, la quantité

$$\int_{\mathrm{X}} f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathrm{X}} f_2 \,\mathrm{d}\mu$$

ne dépend que de f.

En effet, si $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, avec g_1, g_2 elles aussi positives et d'intégrale finie, alors $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$, et comme on a montré l'additivité de l'intégrale des fonctions positives, on a

$$\int_{\mathrm{X}} f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int_{\mathrm{X}} g_2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} f_2 \,\mathrm{d}\mu + \int_{\mathrm{X}} g_1 \,\mathrm{d}\mu,$$

ce qui donne bien le résultat voulu car toutes les quantités sont finies, et les soustractions possibles pour conclure que

$$\int_{\mathrm{X}} f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathrm{X}} f_2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} g_1 \,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathrm{X}} g_2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Définition. Si f est $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$, intégrable par rapport à μ, son *intégrale* est définie par

$$\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu := \int_{\mathrm{X}} f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathrm{X}} f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

mais on sait que l'intégrale peut se calculer avec n'importe quelle décomposition comme différence de fonctions ≥ 0 intégrables.

Si $f \geq 0$, l'intégrale nouvelle est cohérente avec l'ancienne. En effet, on a dans ce cas $f = f^+$, $f^- = 0$ et $\int_{\mathrm{X}} f^- \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Linéarité et croissance

On donne f, g intégrables. On écrit $f = f^+ - f^-$ et $g = g^+ - g^-$; on a une représentation de la somme sous la forme $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, différence de fonctions positives intégrables, qui permet de calculer l'intégrale de la somme et de vérifier que

$$\int_{\mathrm{X}} (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{\mathrm{X}} g \,\mathrm{d}\mu.$$

En effet,

$$\int_{\mathrm{X}} (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} (f^+ + g^+) \,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathrm{X}} (f^- + g^-) \,\mathrm{d}\mu$$

$$= \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Si α est un réel positif, on écrit $\alpha f = \alpha f^+ - \alpha f^-$ et on utilise la posilinéarité de l'intégrale des fonctions ≥ 0, et pour $\alpha < 0$, on écrit $\alpha f = |\alpha| f^- - |\alpha| f^+$ pour voir que dans tous les cas,

$$\int_X (\alpha f) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Si $f \leq g$, la fonction $g - f$ est ≥ 0, donc son intégrale est ≥ 0 et la linéarité donne

$$0 \leq \int_X (g - f) \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu - \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

qui donne la croissance de l'intégrale.

On a clairement

$$-\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu = -\int_X f^+ - \int_X f^- \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f^+ + \int_X f^- = \int_X |f|,$$

ce qui donne

$$\Big| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \Big| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Résumé. *Soient f, g deux fonctions $\mathcal{F}$-mesurables sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et intégrables par rapport à μ ; on a*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \int_X (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int_X g \,\mathrm{d}\mu,$$

et

$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu, \quad \Big| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \Big| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Parenthèse : espaces $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$

L'espace $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ est l'espace vectoriel des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ qui sont $\mathcal{F}$-mesurables et intégrables par rapport à μ. On le munit d'une semi-norme,

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)| \,\mathrm{d}\mu(x),$$

qui peut être nulle pour des fonctions f qui ne sont pas identiquement nulles sur X (mais qui sont tout de même *presque partout* nulles d'après le corollaire 1).

L'espace $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ est l'espace (vectoriel lui aussi) des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ qui sont $\mathcal{F}$-mesurables et *de carré intégrable*, c'est-à-dire que $|f|^2$ a une intégrale finie (on peut dire encore $|f|^2 \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu)$). On le munit de la semi-norme

$$\|f\|_2 = \Big(\int_X |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \Big)^{1/2},$$

et il faut un procédé de passage au quotient pour obtenir l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ dont on parlera plus tard.

Théorème de Lebesgue, première version. *Si une suite* (f_n) *de fonctions* $\mathcal{F}$*-mesurables à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tend simplement vers* f *réelle, et s'il existe une fonction intégrable* g *à valeurs dans* $[0,+\infty[$ *telle que*

$$|f_n| \leq g$$

pour tout n*, il en résulte que les* f_n *sont intégrables, ainsi que* f *et* l'intégrale de la limite est la limite des intégrales,

$$\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Preuve. — On sait que f est $\mathcal{F}$-mesurable comme limite simple ; de plus, on obtient $|f| \leq g$ à la limite, donc f est intégrable.

Comme

$$\Big|\int_{\mathrm{X}} f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu\Big| \leq \int_{\mathrm{X}} |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu,$$

il suffit de prouver que la deuxième intégrale tend vers 0. Par l'inégalité triangulaire, on obtient aussi

$$|f_n - f| \leq 2g,$$

et $|f_n - f|$ tend simplement vers 0 sur X. Les fonctions $2g - |f_n - f|$ sont positives et tendent simplement vers $2g$; d'après Fatou,

$$2\int_{\mathrm{X}} g \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int_{\mathrm{X}} (2g - |f_n - f|) \,\mathrm{d}\mu,$$

ce qui entraîne en retranchant l'intégrale (finie !) de g

$$\limsup_n \int_{\mathrm{X}} |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \leq 0,$$

d'où le résultat.