

Suites décroissantes d'ensembles et convergence dominée

Pour une suite décroissante d'ensembles $(A_n) \subset \mathcal{F}$, il est naturel de dire que l'intersection $A = \bigcap_n A_n$ est la limite de la suite de ces ensembles — la fonction $\mathbf{1}_A$ est bien la limite simple des indicatrices des (A_n) — mais le passage à la limite de la mesure, toujours vrai pour les suites croissantes (B_n) , dont la limite est la réunion $B = \bigcup_n B_n$, ne marche pas toujours dans le cas décroissant : si $A_n = [n, +\infty[$ et si la mesure utilisée est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , la limite A est l'ensemble vide, de mesure nulle, alors que tous les ensembles A_n sont de mesure infinie.

Si A_n décroît vers $A = \bigcap_n A_n$ et si on fixe un rang n_0 , on peut considérer pour tout entier $n \geq n_0$

$$B_n = A_{n_0} \setminus A_n ;$$

c'est une suite croissante d'ensembles qui tend vers $B = A_{n_0} \setminus A$, donc la mesure de B_n croît vers la mesure de B par la propriété de monotonie des mesures σ -additives. De plus, A_{n_0} est la réunion disjointe de B_n et A_n , donc

$$\mu(A_{n_0}) = \mu(A_n) + \mu(B_n).$$

Quand la mesure de A_{n_0} est infinie, on ne peut pas calculer la mesure de A_n à partir de cette équation, et on ne peut pas exploiter le fait que la mesure de B_n tend vers celle de B .

Mais si la mesure de A_{n_0} est finie (donc les deux autres aussi), on peut calculer $\mu(A_n)$ par différence, par conséquent

$$\mu(A_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(B_n) \rightarrow \mu(A_{n_0}) - \mu(B) = \mu(A) ;$$

on obtient ainsi

$$\mu(A_{n_0}) < +\infty \Rightarrow \mu(A) = \lim_n \mu(A_n).$$

Toute proportions gardées, cette remarque est au théorème de convergence dominée ce que la monotonie de la mesure sur les suites croissantes d'ensembles était au théorème de convergence monotone.

Remarque. On vient de voir que le *seul cas* qui ne marche pas pour les suites décroissantes est celui où tous les ensembles A_n sont de mesure infinie ; dans l'exemple donné, la mesure de la limite est 0, mais on pourrait facilement trouver des exemples avec n'importe quelle valeur pour la mesure limite (ajouter à chaque A_n un même ensemble C fixé).

Rappel : convergence dominée, version **V0.0.** Si $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{F} -mesurable, tend simplement sur X vers f , et s'il existe une fonction $g : X \rightarrow [0, +\infty[$ intégrable par rapport à μ telle que

$$\forall n, \forall x \in X, \quad |f_n(x)| \leq g(x),$$

alors f et les f_n sont intégrables et

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Preuve. — Il suffit de voir que $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$, et on a $|f_n - f| \leq 2g$. Le résultat découle du lemme suivant, appliqué à la suite de fonctions $h_n = |f_n - f|$ et au majorant intégrable $G = 2g$.

Lemme. Si (h_n) est une suite de fonctions \mathcal{F} -mesurables sur X , à valeurs dans $[0, +\infty[$ qui converge simplement vers 0, et s'il existe une fonction G sur X , \mathcal{F} -mesurable à valeurs dans $[0, +\infty[$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |h_n| \leq G, \quad \text{et} \quad \int_X G \, d\mu < +\infty,$$

alors

$$\int_X h_n \, d\mu \rightarrow 0.$$

Preuve. — Plutôt que d'appliquer directement le lemme de Fatou, on va faire le choix très contestable de revenir à sa preuve. Par hypothèse, $h_n(x) \rightarrow 0$ pour tout x ; si $\varepsilon > 0$ est donné, on aura pour tout x un entier $n_0(x)$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq h_n(x) \leq \varepsilon,$$

donc pour $n \geq n_0(x)$,

$$H_n(x) = \sup_{k \geq n} h_k(x) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $H_n(x)$ tend vers 0 pour tout x ; on note que $H_{n+1}(x) \leq H_n(x)$: la suite des fonctions (H_n) est décroissante; par ailleurs pour tout $x \in X$ et tout $n \geq 0$ on a, puisque $h_k(x) \leq G(x)$ pour tout k ,

$$0 \leq H_n(x) \leq G(x) < +\infty.$$

Comme

$$0 \leq h_n \leq H_n, \quad \text{donc} \quad 0 \leq \int_X h_n \, d\mu \leq \int_X H_n \, d\mu,$$

il suffit de prouver le résultat pour la suite décroissante H_n .

Il ne reste plus qu'à montrer que l'intégrale de H_n tend vers 0; comme on a des fonctions intégrables à valeurs dans \mathbb{R} , on peut considérer la différence $G - H_n$ et son intégrale

$$\int_X (G - H_n) \, d\mu = \int_X G \, d\mu - \int_X H_n \, d\mu;$$

par ailleurs, la suite $(G - H_n)_{n \geq 0}$ est croissante et formée de fonctions ≥ 0 , donc le théorème de convergence monotone (ou TCM, ou lemme des suites croissantes) est applicable; la limite simple de la suite croissante de fonctions est G , donc

$$\int_X (G - H_n) \, d\mu \rightarrow \int_X G \, d\mu,$$

ce qui donne par différence

$$\lim_n \int_X H_n \, d\mu = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercices d'assouplissement

Lemme. Si f est \mathcal{F} -mesurable sur X , à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\int_X f \, d\mu = 0$$

si et seulement si

$$\mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

Preuve. — Dans un sens, supposons que l'ensemble $N = \{f \neq 0\}$ soit de mesure nulle ; toute fonction étagée φ telle que $0 \leq \varphi \leq f$ est nulle en dehors de N ; si on exprime φ sous la forme $\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{A_j}$, où $(A_j) \subset \mathcal{F}$ est une partition de X , on note que $a_j \mu(A_j) = 0$ pour tout j : soit parce que la valeur a_j est nulle, soit, quand $a_j \neq 0$, parce que la mesure $\mu(A_j)$ où φ prend cette valeur non nulle est nulle (si $a_j \neq 0$, on a $A_j \subset N$). On a donc $\int_X \varphi \, d\mu = 0$, pour toute $\varphi \leq f$, d'où le résultat.

Si l'intégrale de $f \geq 0$ est nulle, on a vu que f est μ -presque partout nulle, en utilisant l'inégalité de Markov.

Corollaire. Si $\mu(N) = 0$ et si f est \mathcal{F} -mesurable réelle intégrable par rapport à μ ,

$$\int_X \mathbf{1}_N f \, d\mu = 0.$$

Preuve. —

$$\left| \int_X \mathbf{1}_N f \, d\mu \right| \leq \int_X \mathbf{1}_N |f| \, d\mu$$

qui est nul par le lemme précédent appliqué à $g = \mathbf{1}_N |f|$.

Mesures de restriction

Si A est un sous-ensemble de X et si $A \in \mathcal{F}$, on peut considérer la tribu $\mathcal{F}|_A$ de parties de A obtenue en prenant les ensembles de \mathcal{F} qui sont contenus dans A , ou bien, ce qui est pareil puisque $A \in \mathcal{F}$, les ensembles $C \cap A$ où C varie dans \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F}|_A = \{B \in \mathcal{F} : B \subset A\} = \{C \cap A : C \in \mathcal{F}\}.$$

On définit la mesure $\mu|_A$ sur cette tribu $\mathcal{F}|_A$ en posant simplement $\mu|_A(B) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{F}|_A$.

Si f est une fonction \mathcal{F} -mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, sa restriction $f|_A$ est la fonction $f|_A : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, définie uniquement sur A par la formule $f|_A(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$; cette fonction est $\mathcal{F}|_A$ -mesurable, car

$$\{f|_A > c\} = \{f > c\} \cap A \in \mathcal{F}|_A$$

pour tout réel c .

Remarque. On pourra voir une analogie avec la topologie induite sur un ouvert U d'un espace topologique X : on peut montrer que la restriction d'une fonction réelle continue sur X est continue sur U exactement comme dans les lignes qui précèdent.

Lemme. Si g est \mathcal{F} -mesurable sur X , à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\int_A g|_A \, d\mu|_A = \int_X \mathbf{1}_A g \, d\mu.$$

Preuve. — On vérifie d'abord l'égalité quand φ est \mathcal{F} -étagée ≥ 0 : si $\varphi = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{1}_{B_j}$ est une représentation de φ sur X , où $(B_j) \subset \mathcal{F}$ est une partition de X , on a

$$\mathbf{1}_A \varphi = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B_j} = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{1}_{A \cap B_j}.$$

La dernière expression fournit aussi une représentation de la restriction $\varphi|_A$ de φ à A : on a une partition de A en ensembles $A \cap B_j$ de la tribu $\mathcal{F}|_A$, la restriction $\varphi|_A$ est constante égale à b_j sur chaque ensemble $A \cap B_j$ de la partition, ce qui donne

$$\int_A \varphi|_A \, d\mu|_A = \sum_{j=1}^n b_j \mu|_A(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^n b_j \mu(A \cap B_j) = \int_X \mathbf{1}_A \varphi \, d\mu.$$

Pour le cas général on passe par une suite croissante (φ_n) de fonctions \mathcal{F} -étagées qui tend vers g , et on applique deux fois le TCM, une fois avec μ et une autre avec $\mu|_A$: la suite $(\mathbf{1}_A \varphi_n)$ tend en croissant vers $\mathbf{1}_A g$ et les restrictions des φ_n tendent en croissant vers la restriction $g|_A$.

Si f est \mathcal{F} -mesurable réelle et μ -intégrable sur X , alors la restriction de f à A est $\mu|_A$ -intégrable sur A et

$$\int_A f|_A \, d\mu|_A = \int_X \mathbf{1}_A f \, d\mu.$$

On obtient facilement cette égalité en appliquant le lemme précédent aux fonctions positives f^+ et f^- .

Ces choses étant bien comprises, on écrira désormais, sauf rares exceptions, en oubliant dans la notation les mentions à l'opération de restriction,

$$\int_A f \, d\mu = \int_X \mathbf{1}_A f \, d\mu.$$

Fonction mesurable ou intégrable définie presque partout

On suppose donné un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) .

Définition. On dit que $Y \subset X$ est μ -négligeable s'il existe un ensemble $N \in \mathcal{F}$ tel que $Y \subset N$ et $\mu(N) = 0$.

On dit qu'une propriété attachée aux points de X est vraie μ -presque partout si l'ensemble des points $x \in X$ où elle n'est pas vraie est μ -négligeable. Par exemple, une fonction f sur X est finie μ -presque partout si l'ensemble des points x où $f(x)$ est infini est μ -négligeable.

Si on a une famille dénombrable $(Y_i)_{i \in I}$ de négligeables, chacun peut être placé dans un ensemble $N_i \in \mathcal{F}$ de mesure nulle, donc $N = \bigcup_{i \in I} N_i \in \mathcal{F}$ est de mesure nulle et contient $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$: une réunion dénombrable de négligeables est négligeable.

Définition. On dit que f est une *fonction \mathcal{F} -mesurable définie μ -presque partout sur X* si f est définie sur un sous-ensemble $X_0 \subset X$, et s'il existe un ensemble de mesure nulle $N \in \mathcal{F}$ tel que $X \setminus X_0 \subset N$ (autrement dit : l'ensemble $X \setminus X_0$ de non-définition est μ -négligeable), et si la restriction de f à $X \setminus N$ est \mathcal{F} -mesurable,

$$\{x \notin N : f(x) > c\} \in \mathcal{F}$$

pour tout c réel.

La restriction à $X \setminus N$ de la fonction f est une vraie fonction \mathcal{F} -mesurable définie sur $X \setminus N$; on dira à l'occasion que f est *bien définie* en dehors de N .

On peut définir une fonction \tilde{f} sur X en posant $\tilde{f}(x) = 0$ si $x \in N$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ sinon. Cette fonction \tilde{f} est \mathcal{F} -mesurable : en effet, l'ensemble $\{\tilde{f} > c\}$ est égal, soit à $\{f|_{X \setminus N} > c\} \in \mathcal{F}$ quand $c \geq 0$, soit à $N \cup \{f|_{X \setminus N} > c\} \in \mathcal{F}$ quand $c < 0$. On dira dans ce paragraphe que f_1 est une *correction* de f si f_1 est une « vraie » fonction \mathcal{F} -mesurable définie sur X tout entier, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, et s'il existe un ensemble $N_1 \in \mathcal{F}$, de mesure nulle pour μ , tel que $f_1(x) = f(x)$ pour tout $x \notin N_1$. La fonction \tilde{f} précédente est une correction particulière de f .

Si g est \mathcal{F} -mesurable définie μ -presque partout, à valeurs dans $[0, +\infty]$, et si g_1, g_2 sont deux corrections de g , à valeurs dans $[0, +\infty]$, associées à des ensembles N_1, N_2 de mesure nulle tels que $g_j = g$ en dehors de N_j , $j = 1, 2$, alors

$$\int_X g_1 \, d\mu = \int_X g_2 \, d\mu.$$

En effet, si on introduit l'ensemble de mesure nulle $N = N_1 \cup N_2$, alors g_1 et g_2 sont égales à g en dehors de N , donc $g_1 = g_2$ en dehors de N et

$$\begin{aligned} \int_X g_1 \, d\mu &= \int_X (\mathbf{1}_N + \mathbf{1}_{X \setminus N}) g_1 \, d\mu = \int_X \mathbf{1}_N g_1 \, d\mu + \int_X \mathbf{1}_{X \setminus N} g_1 \, d\mu \\ &= \int_X \mathbf{1}_{X \setminus N} g_1 \, d\mu = \int_X \mathbf{1}_{X \setminus N} g_2 \, d\mu = \int_X g_2 \, d\mu. \end{aligned}$$

On note aussi que

$$\int_X g_1 \, d\mu = \int_X \mathbf{1}_{X \setminus N_1} g_1 \, d\mu = \int_{X \setminus N_1} g \, d\mu.$$

Si f définie presque partout admet une correction f_1 à valeurs réelles et μ -intégrable, il en sera de même pour tout autre correction f_2 à valeurs réelles, et les intégrales de f_1 et f_2 seront égales : il suffit d'appliquer ce qui précède aux fonctions positives presque partout définies f^+ et f^- . On note aussi que pour toute correction intégrable \tilde{f} égale à f en dehors de N de mesure nulle, on a

$$\int_X \tilde{f} \, d\mu = \int_{X \setminus N} \tilde{f} \, d\mu = \int_{X \setminus N} f \, d\mu.$$

La dernière expression ne dépend donc pas de l'ensemble N de mesure nulle en dehors duquel f est « bien définie ». On décidera de l'appeler l'intégrale de f . On pourra gagner un peu de temps en introduisant la définition suivante : un ensemble $P \in \mathcal{F}$ est μ -plein si son complémentaire $N = X \setminus P$ est de mesure nulle.

Définition. Soit g une fonction \mathcal{F} -mesurable définie μ -presque partout sur X , à valeurs dans $[0, +\infty]$; on pose

$$\int_X g \, d\mu = \int_P g \, d\mu \in [0, +\infty],$$

où $P = X \setminus N \in \mathcal{F}$, $\mu(N) = 0$, est un ensemble μ -plein tel que g soit définie sur P et que $g|_P$ soit \mathcal{F} -mesurable. On a vu que le résultat ne dépend pas de l'ensemble plein P sur lequel g est bien définie.

On dit que f , fonction \mathcal{F} -mesurable définie presque partout est μ -intégrable s'il existe un ensemble μ -plein P tel que f soit définie sur P , que $f|_P$ soit \mathcal{F} -mesurable à valeurs réelles et μ -intégrable. On pose dans ce cas

$$\int_X f \, d\mu = \int_P f \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions \mathcal{F} -mesurables définies μ -presque partout, on peut trouver un même ensemble plein $P \in \mathcal{F}$ sur lequel elles sont toutes les deux bien définies, et on peut donc considérer $f_1 + f_2$ comme une fonction \mathcal{F} -mesurable définie presque partout. Si f_1, f_2 sont positives, ou bien μ -intégrables, l'intégrale de $f_1 + f_2$ est la somme des intégrales : si P est un ensemble plein sur lequel les deux fonctions sont définies, l'intégrale de la fonction $f_1 + f_2$ définie presque partout est, par définition,

$$\int_P (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_P f_1 \, d\mu + \int_P f_2 \, d\mu$$

qui est la somme des intégrales de f_1 et de f_2 .

L'énoncé qui suit est une caricature de l'emploi de l'expression « presque partout », mais il servira à bien attirer l'attention sur le point de vue qui prévaut en théorie de l'intégration.

Théorème de convergence dominée de Lebesgue, version excessive. *On suppose que la suite (f_n) de fonctions \mathcal{F} -mesurables définies μ -presque partout sur X vérifie :*

- il existe une fonction \mathcal{F} -mesurable définie μ -presque partout g qui est μ -**intégrable** et telle que pour tout n , on ait μ -presque partout la majoration $|f_n| \leq g$,
- la suite (f_n) tend vers f μ -presque partout.

Alors la limite f est une fonction μ -intégrable définie μ -presque partout et

$$\int_X f_n \, d\mu \rightarrow \int_X f \, d\mu.$$

Preuve. — On a plein d'ensembles μ -négligeables : les ensembles de non-définition des f_n , la non-définition ou non-finitude de g , les non-majorations de $|f_n|$ par g , la non-convergence de la suite (f_n) vers f . Comme il s'agit d'une famille dénombrable d'ensembles négligeables, on peut les réunir en un seul gros négligeable $Y \subset N \in \mathcal{F}$, et former dans le complémentaire un ensemble plein $P = X \setminus N$ sur lequel tout est bien : en restriction à l'ensemble $P \in \mathcal{F}$, les fonctions (f_n) sont \mathcal{F} -mesurables réelles sur P , convergent simplement vers f en tout point de P , et sont majorées par g finie et intégrable. Comme toutes les intégrales qui nous intéressent peuvent être définies par l'intégrale sur P , cette deuxième forme se ramène à la première, version **V0.0**,

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_P f_n \, d\mu \rightarrow \int_P f \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

On conviendra désormais que l'expression « fonction μ -intégrable sur X », sans autre précision, dans le contexte d'un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) , fait référence à une fonction \mathcal{F} -mesurable définie μ -presque partout sur X , à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, et intégrable par rapport à μ .

Théorème de convergence dominée de Lebesgue, version définitive. *On suppose que la suite (f_n) de fonctions μ -intégrables sur X vérifie :*

– il existe une fonction μ -intégrable g , telle que pour tout n , on ait μ -presque partout la majoration $|f_n| \leq g$,

– la suite (f_n) tend vers f μ -presque partout.

Alors la limite f est μ -intégrable et

$$\int_X f_n \, d\mu \rightarrow \int_X f \, d\mu.$$

Exercice traité.

$$\sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(x) \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \, dy.$$

Pour $0 \leq t \leq \pi/2$, on a $\sin t \geq 2t/\pi$ (concavité), donc

$$(*) \quad 1 - \cos x = \int_0^x \sin t \, dt \geq \int_0^x (2t/\pi) \, dt = x^2/\pi;$$

par le changement de variable $y = \sqrt{n}x$,

$$\sqrt{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n(x) \, dx = \int_{-\pi\sqrt{n}/2}^{\pi\sqrt{n}/2} \cos^n(y/\sqrt{n}) \, dy = \int_{\mathbb{R}} f_n(y) \, dy,$$

où on a posé

$$f_n(y) = \mathbf{1}_{[-\pi\sqrt{n}/2, \pi\sqrt{n}/2]}(y) \cos^n(y/\sqrt{n}).$$

En utilisant (*) et l'inégalité $1 - u \leq e^{-u}$ valable pour tout u réel, on voit que

$$|y/\sqrt{n}| \leq \pi/2 \Rightarrow 0 \leq \cos^n(y/\sqrt{n}) \leq (1 - y^2/(n\pi))^n \leq e^{-y^2/\pi};$$

il en résulte que $g : y \rightarrow e^{-y^2/\pi}$ est un majorant pour la suite (f_n) , et ce majorant g est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R} . Par ailleurs, on voit que $f_n(y) \rightarrow e^{-y^2/2} = f(y)$ pour tout y . On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et conclure.

Version séries de fonctions

Commençons par une remarque ; si on a une suite (v_k) de fonctions positives définies presque partout, il existe pour chaque k un ensemble de mesure nulle $N_k \in \mathcal{F}$ tel que v_k soit « bien définie » en dehors de N_k ; en posant $N = \bigcup_k N_k \in \mathcal{F}$, on a un ensemble de mesure nulle en dehors duquel toutes les fonctions de la suite sont bien définies. On peut donc en conclure que la fonction $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ est une fonction presque partout définie à valeurs dans $[0, +\infty]$. Sur l'ensemble plein $P = X \setminus N$, on peut appliquer la version séries du TCM,

$$\int_X \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right) \, d\mu = \int_P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right) \, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_P v_k \, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_X v_k \, d\mu.$$

Corollaire : version séries du théorème de Lebesgue. Si une série $\sum u_n$ de fonctions μ -intégrables réelles sur X vérifie

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \right) d\mu < +\infty,$$

ou bien, ce qui est équivalent par la version série du TCM,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |u_n| d\mu < +\infty,$$

alors la série numérique $\sum u_n(x)$ converge pour μ -presque tout x , la fonction somme de la série est \mathcal{F} -mesurable et μ -intégrable définie μ -presque partout, et on peut intervertir série et intégrale

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_X u_n d\mu \right).$$

Preuve. — Posons

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| \in [0, +\infty];$$

puisque l'intégrale de cette fonction est finie d'après l'hypothèse, on sait que l'ensemble $N = \{g = +\infty\}$ est négligeable. Cela veut dire que la série

$$\sum_k |u_k(x)|$$

converge presque partout, donc la série $\sum u_k(x)$ converge tout court presque partout, et la somme de cette série fournit une fonction f limite, définie presque partout par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x).$$

Presque partout, les sommes partielles

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$$

tendent simplement vers $f(x)$ et les (f_n) sont bornées par $g(x)$, qui est intégrable,

$$|f_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^n u_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k(x)| \leq g(x).$$

Le résultat découle alors de l'additivité de l'intégrale et du théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) d\mu = \int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu = \lim_n \sum_{k=0}^n \int_X u_k d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_X u_k d\mu.$$