cours 8, le lundi 22 février 2010

Fonctions mesurables ou intégrables à valeurs complexes

Définition. On dit que $f : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{F}$-mesurable si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont $\mathcal{F}$-mesurables à valeurs réelles. On dit que f est μ-intégrable si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont μ-intégrables et on pose

$$\int_{\mathrm{X}} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_{\mathrm{X}} \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\mu.$$

On vérifie la $\mathbb{C}$-linéarité de l'intégrale, en écrivant $\alpha = u + \mathrm{i}v$, $u, v \in \mathbb{R}$, et en décomposant

$$\alpha f = (u + \mathrm{i}v)(\operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f) = (u \operatorname{Re} f - v \operatorname{Im} f) + \mathrm{i}(u \operatorname{Im} f + v \operatorname{Re} f)$$

en parties réelle et imaginaire, et en reconstituant l'intégrale de αf.

Si f est $\mathcal{F}$-mesurable à valeurs complexes, on voit que f est μ-intégrable si et seulement si $\int_{\mathrm{X}} |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, grâce à l'encadrement $|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \le |f| \le |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$.

Pour une fonction φ étagée complexe, on a une expression

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j},$$

où les a_j sont dans $\mathbb{C}$ et où $(\mathrm{A}_j) \subset \mathcal{F}$ est une partition de X. Cette fonction φ est μ-intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathrm{X}} |\varphi| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} |a_j| \mu(\mathrm{A}_j) < +\infty$$

ce qui revient à avoir $|a_j|\mu(\mathrm{A}_j) < +\infty$ pour tout j : la fonction φ est μ-intégrable si (et seulement si) $\mu(\mathrm{A}_j) < +\infty$ pour tout indice j tel que la valeur a_j soit non nulle. Cette condition est automatique quand la mesure μ est finie, c'est-à-dire quand $\mu(\mathrm{X}) < +\infty$.

Si φ est μ-intégrable, on a d'après la définition précédente

$$\int_{\mathrm{X}} \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} \operatorname{Re} \varphi \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_{\mathrm{X}} \operatorname{Im} \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{Re} a_j + \mathrm{i} \operatorname{Im} a_j) \mu(\mathrm{A}_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(\mathrm{A}_j)\,;$$

c'est la formule habituelle, à une petite nuance près : on a à nouveau utilisé la convention $0.\infty = 0$, mais dans un contexte où le 0 est potentiellement une valeur complexe.

Lemme, limite d'étagées. *Si f est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{C}$, *il existe une suite (φ_n) de fonctions $\mathcal{F}$-étagées complexes qui tend simplement vers f ; on peut supposer que $|\varphi_n| \le |f|$ pour tout n.*

Preuve. — On sait trouver deux suites (u_n) et (v_n) de fonctions $\mathcal{F}$-étagées réelles qui tendent respectivement vers $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$, et qui satisfont $|u_n| \le |\operatorname{Re} f|$, $|v_n| \le |\operatorname{Im} f|$. Il suffit de considérer $\varphi_n = u_n + \mathrm{i} v_n$, qui tend simplement vers $\operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f = f$ et vérifie

$$|\varphi_n|^2 = u_n^2 + v_n^2 \le (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 = |f|^2.$$

Conséquence : $\mathbb{C}$-linéarité et majoration. *Si f, g sont μ-intégrables à valeurs complexes, si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,*

$$\int_{\mathrm{X}} (\alpha f + \beta g)\, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_{\mathrm{X}} f\, \mathrm{d}\mu + \beta \int_{\mathrm{X}} g\, \mathrm{d}\mu.$$

De plus,

$$\Bigl|\int_{\mathrm{X}} f\, \mathrm{d}\mu\Bigr| \le \int_{\mathrm{X}} |f|\, \mathrm{d}\mu.$$

Preuve. — On pourrait tout prouver, $\mathbb{C}$-linéarité et majoration, par limite à partir du cas étagé, mais on va considérer que la linéarité est acquise. Passons à la preuve de la majoration du module de l'intégrale. Pour une fonction φ étagée complexe μ-intégrable,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j},$$

l'inégalité voulue est une simple conséquence de l'inégalité triangulaire,

$$\Bigl|\int_{\mathrm{X}} \varphi\, \mathrm{d}\mu\Bigr| = \Bigl|\sum_{j=1}^{n} a_j \mu(\mathrm{A}_j)\Bigr| \le \sum_{j=1}^{n} |a_j| \mu(\mathrm{A}_j) = \int_{\mathrm{X}} |\varphi|\, \mathrm{d}\mu.$$

Pour le cas général, il existe une suite (φ_n) de fonctions $\mathcal{F}$-étagées complexes qui tend simplement vers f, avec $|\varphi_n| \le |f|$; alors, les fonctions étagées réelles $\operatorname{Re} \varphi_n$, $\operatorname{Im} \varphi_n$, $|\varphi_n|$ tendent respectivement vers $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ et $|f|$, en étant toutes dominées par la fonction intégrable fixe $|f|$, par exemple,

$$|\operatorname{Re} \varphi_n| \le |\varphi_n| \le |f| \,;$$

en appliquant trois fois le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\Bigl|\int_{\mathrm{X}} f\, \mathrm{d}\mu\Bigr| = \lim_n \Bigl|\int_{\mathrm{X}} \operatorname{Re} \varphi_n\, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_{\mathrm{X}} \operatorname{Im} \varphi_n\, \mathrm{d}\mu\Bigr|$$

$$= \lim_n \Bigl|\int_{\mathrm{X}} \varphi_n\, \mathrm{d}\mu\Bigr| \le \lim_n \int_{\mathrm{X}} |\varphi_n|\, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} |f|\, \mathrm{d}\mu.$$

Indiquons une deuxième preuve, qui fatigue moins la main du dactylographe, mais demande un peu plus de son cerveau. On peut écrire l'intégrale de f, qui est un nombre complexe I, sous la forme

$$\int_{\mathrm{X}} f\, \mathrm{d}\mu = \mathrm{I} = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

où $r \ge 0$ est le module de l'intégrale et θ un nombre réel, qui est un argument du nombre complexe I. Par la $\mathbb{C}$-linéarité de l'intégrale,

$$\int_{\mathrm{X}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\, \mathrm{d}\mu = r,$$

donc

$$\Bigl|\int_{\mathrm{X}} f\, \mathrm{d}\mu\Bigr| = r = \operatorname{Re}\Bigl(\int_{\mathrm{X}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\, \mathrm{d}\mu\Bigr) = \int_{\mathrm{X}} \operatorname{Re}\bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\bigr)\, \mathrm{d}\mu$$

$$\le \int_{\mathrm{X}} \bigl|\operatorname{Re}\bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\bigr)\bigr|\, \mathrm{d}\mu \le \int_{\mathrm{X}} \bigl|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\bigr|\, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{X}} |f|\, \mathrm{d}\mu.$$

Cas complexe du théorème de Lebesgue

Rien ne change dans l'énoncé du théorème de convergence dominée pour des fonctions complexes, à part que le symbole $|f|$ se lit maintenant « module de f ».

Exercice : intégrales de Wallis et intégrale gaussienne

On pose pour $n \ge 0$

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x.$$

On a $\mathrm{W}_0 = \pi/2$, $\mathrm{W}_1 = 1$. Si $n > 0$

$$\mathrm{W}_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos x \,\mathrm{d}x = \Bigl[\cos^n x \sin x\Bigr]_{x=0}^{\pi/2} + n \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$= n \int_0^{\pi/2} (\cos^{n-1} x)(1 - \cos^2 x) \,\mathrm{d}x = n\mathrm{W}_{n-1} - n\mathrm{W}_{n+1},$$

ce qui implique

$$(n+1)\,\mathrm{W}_{n+1} = n\,\mathrm{W}_{n-1}\,;$$

on obtient donc

$$(n+1)\,\mathrm{W}_{n+1}\,\mathrm{W}_n = n\,\mathrm{W}_{n-1}\,\mathrm{W}_n = n\,\mathrm{W}_n\,\mathrm{W}_{n-1},$$

une égalité qu'on peut « descendre » tant que $n > 1$,

$$(n+1)\,\mathrm{W}_{n+1}\,\mathrm{W}_n = n\mathrm{W}_n\,\mathrm{W}_{n-1} = (n-1)\,\mathrm{W}_{n-1}\,\mathrm{W}_{n-2} = \ldots = 1.\mathrm{W}_1\,\mathrm{W}_0 = \pi/2.$$

Cela prouve que $2n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1} = \pi$ pour tout entier $n > 0$. On a vu au cours précédent que

$$2\sqrt{n}\,\mathrm{W}_n \to \mathrm{I} := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \,\mathrm{d}y,$$

et comme $(n-1)/n$ tend vers 1, on a aussi $2\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{n-1} \to \mathrm{I}$, donc

$$\mathrm{I}^2 = \lim_n 4n\,\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1} = 2\pi,$$

ce qui permet de trouver la valeur de l'intégrale gaussienne,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2} \,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}.$$

Cette intégrale importante se calcule aussi au moyen d'une intégrale double évaluée en coordonnées polaires.

Exercice traité. Par application de la version série du TCD, montrer que la transformée de Fourier-Laplace de la loi gaussienne, définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{F}(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2+xz} \, \frac{\mathrm{d}\lambda(x)}{\sqrt{2\pi}},$$

admet un développement en série entière de rayon de convergence infini.

Preuve. — On fixe $z \in \mathbb{C}$, quelconque, et on écrit

$$\mathrm{e}^{xz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n z^n}{n!},$$

de sorte que

$$\mathrm{F}(z) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \frac{x^n z^n}{n!} \Big) \, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}},$$

intégrale d'une série de fonctions complexes u_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \frac{x^n z^n}{n!}.$$

Pour pouvoir intervertir l'intégrale et la série, il suffit, d'après la version séries du théorème de convergence dominée, de vérifier que la fonction $\sum |u_n(x)|$ est intégrable. Or

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)| = \mathrm{e}^{-x^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n |z|^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{e}^{|x|\,|z|}$$

est d'intégrale finie : en effet, la fonction précédente est paire, donc

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2+x|z|} \, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= 2 \, \mathrm{e}^{|z|^2/2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-|z|)^2/2} \, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} = 2 \, \mathrm{e}^{|z|^2/2} \int_{-|z|}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} \leq 2 \, \mathrm{e}^{|z|^2/2} < +\infty.$$

La condition du théorème étant vérifiée, on peut intervertir et trouver

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \frac{x^n z^n}{n!} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, x^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} \Big) z^n,$$

développement en série entière de rayon infini,

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{avec} \ \ a_n = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, x^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}$$

pour tout $n \geq 0$. On pourrait calculer les coefficients a_n par récurrence, mais une méthode plus rapide consiste à remarquer qu'on peut calculer $\mathrm{F}(y)$ pour tout y réel ; en effet,

$$\mathrm{F}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2+xy} \, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} = \mathrm{e}^{y^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-y)^2/2} \, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \mathrm{e}^{y^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} = \mathrm{e}^{y^2/2} .$$

On a donc pour tout y réel

$$\mathrm{F}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n = \mathrm{e}^{y^2/2},$$

ce qui permet d'identifier les coefficients a_n, d'après l'unicité des coefficients des sommes de séries entières de rayon de convergence > 0 ; on obtient ainsi pour tout entier $n \geq 0$

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n n!}, \quad a_{2n+1} = 0.$$

On en déduit que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} z^{2n} = \mathrm{e}^{z^2/2} .$$

II.2.5. *Intégrales dépendant d'un paramètre*

On donne un espace mesuré $(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$, un espace métrique (Y, d) et une fonction réelle ou complexe f sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. On suppose au minimum que

1. pour tout $y \in \mathrm{Y}$, la fonction $x \to f(x, y)$ est μ-intégrable.

Cela permet de définir pour tout $y \in \mathrm{Y}$

$$\mathrm{F}(y) = \int_{\mathrm{X}} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x),$$

une « intégrale dépendant du paramètre y ».

Théorème : continuité en un point. *On suppose que $f(x, y)$ est une fonction réelle ou complexe, définie sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, où $(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et (Y, d) un espace métrique. On fixe un point y^* de Y, et on suppose aussi que*

$\mathbf{1_m}$ – *pour tout $y \in \mathrm{Y}$, la fonction $x \to f(x, y)$ est $\mathcal{F}$-mesurable définie μ-presque partout ;*

2 – *pour μ-presque tout $x \in \mathrm{X}$, la fonction $y \to f(x, y)$ est continue au point y^* ;*

3 – *il existe une fonction μ-intégrable $g : x \in \mathrm{X} \to g(x)$ telle que pour tout $y \in \mathrm{Y}$, on ait μ-presque partout la majoration $|f(x, y)| \leq g(x)$.*

Alors, la fonction F *définie sur* Y *par*

$$\mathrm{F}(y) = \int_{\mathrm{X}} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

est continue au point y^*.

On note que l'hypothèse de mesurabilité $\mathbf{1_m}$ et la majoration **3** entraînent l'hypothèse minimale **1** d'intégrabilité de $x \to f(x, y)$, pour tout $y \in \mathrm{Y}$.

Preuve. — Pour montrer la continuité de F au point y^* de *l'espace métrique* Y, il suffit de montrer que pour toute suite (y_n) tendant vers y^*, on a $\mathrm{F}(y_n) \to \mathrm{F}(y^*)$: c'est exactement ce que dit le TCD, si on pose

$$h_n(x) = f(x, y_n), \quad h(x) = f(x, y^*).$$

L'hypothèse **3** donne la majoration de $|h_n|$ par une fonction intégrable fixe g, et **2** donne la convergence simple μ-presque partout de $h_n(x)$ vers $h(x)$. On déduit par Lebesgue dominé que

$$\mathrm{F}(y_n) = \int_{\mathrm{X}} h_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \to \int_{\mathrm{X}} h(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{F}(y^*),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. *On suppose que $f(x,y)$ est une fonction réelle ou complexe, définie sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, où $(\mathrm{X}, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et (Y, d) un espace métrique. On suppose de plus que*

$\mathbf{1_m}$ – *pour tout $y \in \mathrm{Y}$, la fonction $x \to f(x,y)$ est $\mathcal{F}$-mesurable définie μ-presque partout ;*

$\mathbf{2_g}$ – *pour presque tout $x \in \mathrm{X}$, la fonction $y \to f(x,y)$ est continue sur Y ;*

$\mathbf{3}_\ell$ – *pour tout $y^* \in \mathrm{Y}$, il existe un voisinage V^* de y^* dans Y et une fonction μ-intégrable $g_{\mathrm{V}^*} : x \in \mathrm{X} \to g_{\mathrm{V}^*}(x)$ tels que pour tout $y \in \mathrm{V}^*$, on ait μ-presque partout la majoration $|f(x,y)| \le g_{\mathrm{V}^*}(x)$.*

Alors, la fonction F définie sur Y par

$$\mathrm{F}(y) = \int_{\mathrm{X}} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

est continue sur Y.

L'indice g dans $\mathbf{2_g}$ est pour global : on a globalisé l'hypothèse de continuité ; l'indice ℓ dans $\mathbf{3}_\ell$ est pour local : on a localisé la majoration au voisinage de chaque point.

Preuve. — Soit y^* dans Y, quelconque ; d'après $\mathbf{3}_\ell$, il existe un voisinage V^* de y^* et une fonction $g = g_{\mathrm{V}^*}$ intégrable attachée à ce voisinage tels que $|f(x,y)| \le g(x)$ pour tout $y \in \mathrm{V}^*$; d'après le théorème précédent, la restriction de F au voisinage V^* est continue au point y^* : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y,

$$(*) \qquad \big(d(y,y^*) < \delta \ \ \mathbf{et}\ \ y \in \mathrm{V}^*\big) \ \Rightarrow\ |\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(y^*)| < \varepsilon\,;$$

comme V^* est un voisinage de y^*, il en résulte que F est continue au point y^* ; en effet, il existe $r > 0$ tel que V^* contienne la boule ouverte de rayon r

$$\mathrm{B}(y^*, r) = \{y \in \mathrm{Y} : d(y,y^*) < r\}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ comme avant, choisissons $\delta' = \min(\delta, r) > 0$; alors, la condition $d(y,y^*) < \delta'$ implique $d(y,y^*) < \delta$ **et** $d(y,y^*) < r$, donc $y \in \mathrm{B}(y^*, r) \subset \mathrm{V}^*$, et d'après la propriété $(*)$ due à la continuité de la restriction, on conclut que $|\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(y^*)| < \varepsilon$.

Remarque. Plutôt que de pinailler avec la restriction, on aurait fait aussi vite en répétant la preuve du théorème, avec la petite adaptation nécessaire : si $(y_n) \subset \mathrm{Y}$ tend vers y^*, on n'a peut-être pas la majoration $|f(x,y_n)| \le g_{\mathrm{V}^*}(x)$ pour tout n, mais à partir d'un certain rang le point y_n entre dans le voisinage V^* et la majoration par g_{V^*} devient valable : il existe n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$, on ait $d(y_n, y^*) < r$, donc $y_n \in \mathrm{V}^*$ et $|f(x,y_n)| \le g_{\mathrm{V}^*}(x)$.

Exemple traité. La fonction Γ est définie par

$$\forall s > 0, \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}\, \mathrm{d}x.$$

On va montrer qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$.

Preuve. — Ici $\mathrm{X} = \mathrm{Y} =]0, +\infty[$, la mesure est la mesure de Lebesgue λ et

$$\Gamma(s) = \int_{\mathrm{X}} f(x,s)\, \mathrm{d}\lambda(x), \quad f(x,s) = \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1}.$$

Il n'est pas possible de trouver pour $f(x,s)$ un majorant $g(x)$ intégrable valable pour tout $s > 0$; en effet, si on avait $f(x,s) \leq g(x)$ pour tout $s \in]0,1]$ par exemple, on déduirait en passant à la limite quand $s \to 0$ que

$$0 < x \leq 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-1}\, x^{-1} \leq \mathrm{e}^{-x}\, x^{-1} \leq g(x),$$

et comme

$$\mathrm{e}^{-1} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = +\infty,$$

la fonction g ne pourrait pas être intégrable. Mais si s^* est fixé, on peut considérer $\mathrm{V}^* =]s^*/2, 2s^*[$ (par exemple) et trouver un majorant intégrable $g_{\mathrm{V}^*}(x)$ de $f(x,s)$ valable pour tout $s \in \mathrm{V}^*$. En effet, $s \to x^{s-1}$ est décroissante quand $0 < x \leq 1$, donc on a

$$(0 < x \leq 1,\; s \in \mathrm{V}^*) \;\Rightarrow\; 0 \leq f(x,s) = \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \leq \mathrm{e}^{-x}\, x^{s^*/2-1}$$

et $s \to x^{s-1}$ est croissante quand $x \geq 1$, donc

$$(x \geq 1,\; s \in \mathrm{V}^*) \;\Rightarrow\; 0 \leq f(x,s) = \mathrm{e}^{-x}\, x^{s-1} \leq \mathrm{e}^{-x}\, x^{2s^*-1}.$$

On obtient le majorant intégrable g_{V^*}, valable dans V^* en posant

$$g(x) = \mathbf{1}_{]0,1]}(x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{s^*/2-1} + \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{2s^*-1}.$$

On vérifie l'intégrabilité de g_{V^*},

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, x^{s^*/2-1} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{s^*/2-1} \mathrm{d}x = \frac{1}{s^*/2}$$

et pour la deuxième intégrale, on note que pour tous $x, \alpha > 0$ on a, par changements successifs,

$$x \leq \mathrm{e}^x, \quad x/\alpha \leq \mathrm{e}^{x/\alpha}, \quad x^\alpha \leq \alpha^\alpha\, \mathrm{e}^x, \quad x^\alpha \leq 2^\alpha \alpha^\alpha\, \mathrm{e}^{x/2}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{2s^*-1} \mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, x^{2s^*} \mathrm{d}x \leq 2^{2s^*} (2s^*)^{2s^*} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{e}^{x/2}\, \mathrm{d}x$$

$$< 2^{2s^*} (2s^*)^{2s^*} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\, \mathrm{d}x = 2.2^{2s^*} (2s^*)^{2s^*} < +\infty.$$