Intégration et Probabilités (M43050) **2009-2010**

DST du 2 mars 2010

On prendra soin de justifier les passages à la limite. Le théorème de convergence dominée sera utile pour cela. On rappelle que pour tout y réel,

$$\mathrm{e}^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}.$$

On pourra admettre le résultat d'une question et traiter les questions suivantes.

Dans tout le devoir, on suppose que f est une fonction réelle borélienne et Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$, et on fixe un nombre réel c tel que $0 < c < 1$.

1. Si f est nulle sur l'intervalle $[c, 1]$, montrer que pour tout entier $m \geq 0$ on a

$$\Big|\int_0^1 s^m f(s)\,\mathrm{d}s\Big| \leq c^m \int_0^1 |f(s)|\,\mathrm{d}s.$$

2. Soient n un entier ≥ 0 et u un nombre réel ≥ 0 ; montrer que la série numérique de terme général $\frac{(-1)^k}{k!} u^{kn}$, où k varie de 0 à l'infini, est absolument convergente et a pour somme $\varphi_n(u) = \exp\big(-u^n\big)$. Déterminer la limite de la suite $(\varphi_n(u))$ quand n tend vers $+\infty$, selon la position de $u \geq 0$ par rapport à 1.

3. Soient n un entier ≥ 0 et t un nombre réel > 0 ; montrer que la série de fonctions positives sur $[0,1]$ de terme général $s \to \frac{1}{k!}(s/t)^{kn}$, où k varie de 0 à l'infini, a une somme qui reste bornée quand $s \in [0,1]$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 (s/t)^{kn} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \big(1 - \exp(-(s/t)^n)\big) f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{$*$}$$

On suppose *dans toute la suite* qu'il existe M tel que, pour tout entier $m \geq 0$, on ait :

$$\Big|\int_0^1 s^m f(s)\,\mathrm{d}s\Big| \leq \mathrm{M}\,c^m.$$

4. On considère t tel que $t > c$. Montrer que

$$v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}(c/t)^{kn}$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En déduire que pour cette valeur de t, le membre de gauche de l'égalité $(*)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5. On suppose que $c < t < 1$. Montrer que pour cette valeur de t, le membre de droite de l'égalité (*) tend vers $\int_t^1 f(s)\,\mathrm{d}s$ quand n tend vers $+\infty$. Montrer que, pour tous x, y tels que $c \leq x \leq y \leq 1$, on a

$$\int_x^1 f(s)\,\mathrm{d}s = 0, \quad \int_x^y f(s)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Montrer que si on suppose f continue, alors f est nulle sur l'intervalle $[c, 1]$.