Intégration et Probabilités (M43050) **2009-2010**

Examen final du lundi 17 mai 2010 durée : 3 heures

On pourra admettre le résultat d'une question et traiter les questions suivantes.

— *Exercice I* —

a. Soit a un nombre réel tel que $0 < a < \pi$; montrer que pour tout r tel que $0 \leq r < 1$, on a

$$\int_a^\pi \frac{x-a}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x.$$

b. Vérifier que $|1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos x$. Pour x réel fixé, montrer que $1 + r^2 - 2r\cos x \geq \sin^2 x$ pour tout r réel ; montrer que $|1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| \geq 1$ quand $\pi/2 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq r < 1$.

Montrer que

$$\int_a^\pi \frac{x-a}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r \nearrow 1} \int_a^\pi \frac{x-a}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x.$$

c. Montrer que

$$\int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{d}x = \int_a^\pi (x-a)\Big(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\Big)\,\mathrm{d}x,$$

puis montrer que

$$\int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{d}x = 2 \lim_{r \nearrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{d}x = -2 \lim_{r \nearrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

d. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $\int_a^\pi (x-a)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$. Montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout $a \in [0, \pi]$, on ait

$$\frac{a^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + c = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n^2}.$$

— *Exercice II* —

On munit $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue λ et de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Pour chaque réel α tel que $0 < \alpha < 1$ on définit la fonction g_α sur $[0,1]$ par $g_\alpha(0) = 0$ et $g_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ si $0 < x \leq 1$.

a. Vérifier que g_α est borélienne. Pour quelles valeurs de $p \in [1, +\infty]$ la fonction g_α est-elle élément de l'espace $\mathrm{L}^p([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$?

Pour toute fonction réelle f sur $[0,1]$ et tout réel t on emploiera la notation abrégée

$$\{f > t\} = \{x \in [0,1] : f(x) > t\}.$$

b. On suppose que f est une fonction borélienne sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0, +\infty[$. Vérifier que pour $x \in [0,1]$ fixé, on a

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\,p t^{p-1}\,\mathrm{d}t = f(x)^p.$$

Montrer que

$$\int_0^1 f(x)^p\,\mathrm{d}x = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \lambda\big(\{f > t\}\big)\,\mathrm{d}t.$$

TOURNEZ S.V.P.

On suppose maintenant que pour un certain $\alpha \in]0,1[$, la fonction f de la question b vérifie la propriété (P_α) suivante,

$$(\mathrm{P}_\alpha) \qquad\qquad \forall t > 0, \quad t\lambda\big(\{f > t\}\big) \le \int_0^1 \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x) g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. Pour tout entier $\mathrm{N} > 0$, on définit la fonction f_N sur $[0,1]$ par $f_\mathrm{N}(x) = \min(f(x), \mathrm{N})$; vérifier que $\{f_\mathrm{N} > \mathrm{N}\} = \emptyset$, et que $\{f_\mathrm{N} > t\} = \{f > t\}$ pour tout $t < \mathrm{N}$; en déduire que f_N possède aussi la propriété (P_α).

Montrer que pour $1 < p < +\infty$, on a

$$\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^p\,\mathrm{d}x \le \frac{p}{p-1}\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^{p-1} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Dans le cas $p = 2$, en déduire que

$$\Big(\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \le 2\Big(\int_0^1 g_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

d. Déduire des questions précédentes le résultat suivant : si $0 < \alpha < 1/2$ et si la fonction f vérifie la propriété (P_α), alors f est élément de $\mathrm{L}^2([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ et

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2} \le \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}}.$$

— *Exercice III* —

a. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, et suivant la loi exponentielle $\mathrm{d}\mu(x) = \mathbf{1}_{x\geqslant 0}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; pour $a, b > 0$ donnés, déterminer la fonction de répartition de $\mathrm{V} = \max(\mathrm{X}/a, \mathrm{Y}/b)$. La loi de V admet-elle une densité ? Calculer l'espérance de V.

b. On considère maintenant une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a. exponentielles indépendantes de même loi μ (donnée dans la question a), et pour tout entier $n \ge 2$ on pose

$$\mathrm{Z}_n = \max\Big(\frac{\mathrm{X}_2}{\ln 2}, \dots, \frac{\mathrm{X}_n}{\ln n}\Big).$$

Montrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \le t) = \prod_{k=2}^n \Big(1 - \frac{1}{k^t}\Big).$$

c. En utilisant les inégalités (qu'on pourra admettre) $1-u \le \mathrm{e}^{-u}$, valable pour tout nombre réel u, et $\mathrm{e}^{-2u} \le 1-u$, valable pour $0 \le u \le 1/2$, montrer que pour tout $t \ge 1$, on a l'encadrement suivant pour la fonction de répartition $\mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}$ de la v.a. Z_n,

$$\mathrm{e}^{-2\mathrm{S}_n(t)} \le \mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(t) \le \mathrm{e}^{-\mathrm{S}_n(t)}, \quad \text{où} \quad \mathrm{S}_n(t) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^t}.$$

d. On définit une fonction Z de Ω dans $[0, +\infty]$ par $\omega \in \Omega \to \mathrm{Z}(\omega) = \sup_{n\geqslant 2} \mathrm{Z}_n(\omega)$, valeur finie ou égale à $+\infty$; indiquer pourquoi Z est $\mathcal{F}$-mesurable. Montrer que

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} \le 1) = \lim_n \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \le 1) = \lim_n \mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(1) = 0.$$

On pose $\mathrm{S}(t) = \lim_n \mathrm{S}_n(t)$ pour tout $t > 1$. Vérifier que pour tout réel $t > 1$, $\mathrm{S}(t)$ est fini et que

$$1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{S}(t)} \le \mathrm{P}(\mathrm{Z} > t) \le 1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{S}(t)}.$$

En utilisant une comparaison avec une intégrale portant sur la fonction $x \to x^{-t}$, montrer que pour tout $t > 1$, on a

$$\mathrm{S}(t) \le 2^{-t} + \frac{2^{1-t}}{t-1}.$$

Montrer que

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = +\infty) = 0.$$