Intégration et Probabilités (M43050) **2009-2010**

Corrigé de l'examen final du lundi 17 mai 2010

— *Exercice I* —

a. Soit a un nombre réel tel que $0 < a < \pi$; montrer que pour tout r tel que $0 \le r < 1$, on a

$$\int_a^\pi \frac{x-a}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x.$$

Solution. — La série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$, et sa somme est alors égale à $1/(1-z)$; pour $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $0 \le r < 1$ on obtient

$$\frac{1}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,x}\,.$$

On a vu en cours un critère suffisant pour pouvoir intervertir intégrale et série de fonctions, qui est que la somme de la série des *modules* soit une fonction intégrable. Ici, avec $0 < a < \pi$, on a

$$u_n(x) = (x-a)\mathbf{1}_{[a,\pi]}(x) r^n\,\mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,x}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)| \le \pi \mathbf{1}_{[0,\pi]}(x) \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{\pi}{1-r}\mathbf{1}_{[0,\pi]}(x),$$

majorant qui est intégrable en x par rapport à la mesure de Lebesgue. On peut donc intervertir, ce qui donne la solution.

On pouvait aussi résoudre cette question en utilisant les résultats de la théorie de l'intégrale de Riemann (intégrale sur l'intervalle fermé borné $[a,\pi]$) : la série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge *normalement* sur l'intervalle $[a,\pi]$, puisque

$$\max\{|u_n(x)| : a \le x \le \pi\} \le \pi r^n =: v_n$$

est le terme général d'une série numérique positive convergente, par conséquent l'interversion série-intégrale est licite.

b. Vérifier que $|1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos x$. Pour x réel fixé, montrer que $1 + r^2 - 2r\cos x \ge \sin^2 x$ pour tout r réel ; montrer que $|1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| \ge 1$ quand $\pi/2 \le x \le \pi$ et $0 \le r < 1$.

Montrer que

$$\int_a^\pi \frac{x-a}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r \nearrow 1} \int_a^\pi \frac{x-a}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x.$$

Solution. — On a

$$|1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2 = (1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(1 - r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = 1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + r^2 = 1 - 2r\cos(x) + r^2.$$

Pour x fixé, le trinôme

$$\mathrm{T}_x : r \in \mathbb{R} \longrightarrow 1 + r^2 - 2r\cos(x)$$

annule sa dérivée en $r_0 = \cos x$, qui correspond au minimum du trinôme T_x, égal à

$$\min(\mathrm{T}_x) = 1 + \cos(x)^2 - 2\cos(x)^2 = 1 - \cos(x)^2 = \sin(x)^2.$$

On sait bien que l'étude des trinômes se ramène à la « formation de carrés ». Avec un bon œil, on pouvait remarquer tout de suite que

$$1 - 2r\cos x + r^2 = \sin(x)^2 + \cos(x)^2 - 2r\cos x + r^2 = \sin(x)^2 + \bigl(\cos(x) - r\bigr)^2 \geq \sin(x)^2.$$

Lorsque $\pi/2 \leq x \leq \pi$, on a $\cos(x) \leq 0$, donc avec $r \geq 0$ on trouve

$$|1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos(x) \geq 1 + r^2 \geq 1.$$

On a maintenant à étudier une intégrale dépendant du paramètre r, avec $0 \leq r \leq 1$,

$$\mathrm{I}(r) = \int_a^\pi \frac{x-a}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x,r)\,\mathrm{d}x.$$

La fonction sous l'intégrale

$$f(x,r) = \frac{(x-a)\mathbf{1}_{[a,\pi]}(x)}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$$

est continue en $r \in [0,1]$ pour tout x (si $0 < a \leq x \leq \pi$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$ et le dénominateur ne s'annule pas, il n'y a donc pas de problème quand $r = 1$; si x n'est pas dans cet intervalle, la fonction $r \to f(x,r)$ est nulle). De plus, pour $a \leq x \leq \pi/2$, on a $|1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| \geq \sin(x) \geq \sin(a) > 0$ car la fonction sinus est croissante sur $[0, \pi/2]$, et on a $|1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| \geq 1 \geq \sin(a)$ quand $\pi/2 \leq x \leq \pi$. Finalement on peut écrire la majoration

$$|f(x,r)| \leq \frac{\pi}{\sin(a)}\,\mathbf{1}_{[a,\pi]}(x)$$

et le majorant donné par le terme de droite est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, indépendante du paramètre $r \in [0,1]$. Le théorème de continuité (ou bien simplement le théorème de convergence dominée) permet de conclure.

Ici encore, on pouvait raisonner par convergence uniforme sur $[a,\pi]$ et avec les propriétés de l'intégrale de Riemann. Pour tout $x \in [a,\pi]$, on a pour $r < 1$

$$\Bigl|\frac{x-a}{1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} - \frac{x-a}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\Bigr| \leq \pi \Bigl|\frac{(1-r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(1 - r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})}\Bigr| \leq \pi\,\frac{(1-r)}{\sin(a)^2},$$

donc $\bigl|\mathrm{I}(r) - \mathrm{I}(1)\bigr| \leq \pi^2 \sin(a)^{-2}|1 - r|$, quantité qui tend vers 0 quand $r \to 1$.

c. Montrer que

$$\int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{d}x = \int_a^\pi (x-a)\Bigl(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\Bigr)\,\mathrm{d}x,$$

puis montrer que

$$\int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{d}x = 2 \lim_{r \nearrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{d}x = -2 \lim_{r \nearrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Solution. — Calculons

$$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})} = \frac{2 - 2\cos x}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|^2} = 1,$$

ce qui donne la première égalité. En utilisant les questions a et b, on a d'une part

$$\int_a^\pi \frac{x-a}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\nearrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{e}^{n\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x,$$

et en prenant le complexe conjugué,

$$\int_a^\pi \frac{x-a}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\nearrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x.$$

L'addition de ces deux égalités, jointe au premier résultat de cette question, donne le deuxième résultat demandé. Pour le troisième, il suffit de remarquer que dans la série du second membre, le terme pour $n = 0$ est

$$2r^0 \int_a^\pi (x-a)\cos(0.x)\,\mathrm{d}x = 2\int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{d}x,$$

qu'on fait passer de l'autre côté de l'égalité.

d. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $\int_a^\pi (x-a)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$. Montrer qu'il existe une constante c telle que pour tout $a \in [0,\pi]$, on ait

$$\frac{a^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + c = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n^2}.$$

Solution. — Par intégration par parties,

$$v_n := \int_a^\pi (x-a)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \Big[(x-a)\frac{\sin(nx)}{n}\Big]_{x=a}^{\pi} - \int_a^\pi \frac{\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 + \Big[\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big]_{x=a}^{\pi} = \frac{\cos(n\pi)-\cos(na)}{n^2} = \frac{(-1)^n - \cos(na)}{n^2}.$$

On note que $v_n = \mathrm{O}(n^{-2})$ est absolument sommable, donc

$$r \to \sum_{n=1}^{+\infty} v_n r^n$$

est une série normalement convergente sur $[0,1]$ de fonctions continues, donc sa somme est une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$. Il en résulte que

$$-2\lim_{r\nearrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \int_a^\pi (x-a)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = -2\lim_{r\nearrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n r^n = -2\sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

On a donc

$$\int_a^\pi (x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{(\pi-a)^2}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2(-1)^n + 2\cos(na)}{n^2}$$

qui se transforme en

$$\frac{(\pi-a)^2}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n^2},$$

et pour finir

$$\frac{a^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi^2}{4} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n^2},$$

d'où le résultat,

$$(*) \qquad \frac{a^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + c = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n^2},$$

avec la constante c égale à

$$c = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Les gens savants diront que $c = \pi^2/6$: on peut retrouver ce résultat en calculant l'intégrale sur $[0, \pi]$ des deux membres de l'égalité $(*)$, et en utilisant le fait que pour tout $n \geq 1$, on a $\int_0^\pi \cos(na)\,\mathrm{d}a = 0$; en effet, comme la série de fonctions de a au second membre de $(*)$ converge normalement, on obtient

$$-\frac{\pi^3}{6} + c\pi = \Big[\frac{a^3}{12} - \frac{\pi a^2}{4} + ca\Big]_{a=0}^{\pi} = \int_0^\pi \Big(\frac{a^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + c\Big)\,\mathrm{d}a = 0.$$

— *Exercice II* —

On munit $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue λ et de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. Pour chaque réel α tel que $0 < \alpha < 1$ on définit la fonction g_α sur $[0,1]$ par $g_\alpha(0) = 0$ et $g_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ si $0 < x \leq 1$.

a. Vérifier que g_α est borélienne. Pour quelles valeurs de $p \in [1, +\infty]$ la fonction g_α est-elle élément de l'espace $\mathrm{L}^p([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$?

Solution. — D'après le cours, il suffit de montrer que les ensembles $\{g_\alpha > c\}$ sont boréliens pour tout c réel. Si $c < 0$, on a $\{g_\alpha > c\} = [0,1]$ qui est fermé, donc borélien ; si $0 \leq c < 1$, on a $\{g_\alpha > c\} =]0,1]$ qui est borélien ; si $c \geq 1$, l'ensemble

$$\{g_\alpha > c\} = \{x \in]0,1] : x^{-\alpha} > c\} =]0, c^{-1/\alpha}[$$

est ouvert. On pouvait simplifier un peu la discussion en notant que g_α est continue, et aussi décroissante, sur l'intervalle semi-ouvert $]0,1]$; il résulte de la décroissance que $\{g_\alpha > c\}$ est un ensemble égal à un intervalle auquel on ajoute éventuellement le point 0 : un tel ensemble est borélien.

Par ailleurs

$$\int_0^1 g_\alpha(x)^p \;dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{p\alpha}}$$

est fini si et seulement si $p\alpha < 1$ (critère de Riemann pour la convergence des intégrales). Comme $\alpha < 1$, la réponse à la question posée est

$$(g_\alpha \in \mathrm{L}^p) \;\Leftrightarrow\; \big(p \in [1, 1/\alpha[\big).$$

Pour toute fonction réelle f sur $[0,1]$ et tout réel t on emploiera la notation abrégée

$$\{f > t\} = \{x \in [0,1] : f(x) > t\}.$$

b. On suppose que f est une fonction borélienne sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0, +\infty[$. Vérifier que pour $x \in [0,1]$ fixé, on a

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\, p t^{p-1}\,\mathrm{d}t = f(x)^p.$$

Montrer que
$$\int_0^1 f(x)^p \,\mathrm{d}x = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\lambda\big(\{f>t\}\big)\,\mathrm{d}t.$$

Solution. — L'énoncé a oublié de préciser qu'il faut supposer $1 \le p < +\infty$ dans cette question, on retire p points à son auteur.

La valeur de $\mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)$ est 1 si et seulement si $f(x) > t$, et c'est 0 sinon ; on a donc

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\, pt^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{0\leqslant t<f(x)}\, pt^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{f(x)} pt^{p-1}\,\mathrm{d}t = \Big[t^p\Big]_{t=0}^{f(x)} = f(x)^p.$$

On a par conséquent, par Fubini positif

$$\int_0^1 f(x)^p\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\, pt^{p-1}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\Big(\int_0^1 \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\lambda\big(\{f>t\}\big)\,\mathrm{d}t.$$

L'application de Fubini positif est justifiée par le fait que

$$(x,t) \in [0,1]\times[0,+\infty[\;\longrightarrow\; \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\, pt^{p-1}$$

est borélienne positive, comme composée du couple borélien $(x,t) \to (f(x),t)$ avec l'application $(u,v) \to \mathbf{1}_{u>v}\, p\,|v|^{p-1}$ qui est le produit de l'indicatrice de l'ouvert $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>v\}$ de $\mathbb{R}^2$ par la fonction continue $(u,v)\in\mathbb{R}^2 \to p\,|v|^{p-1}$.

On suppose maintenant que pour un certain $\alpha \in]0,1[$, *la fonction* f *de la question b vérifie la propriété* (P_α) *suivante,*

$$(\mathrm{P}_\alpha) \qquad\qquad \forall t>0, \quad t\lambda\big(\{f>t\}\big) \le \int_0^1 \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\, g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. Pour tout entier $\mathrm{N}>0$, *on définit la fonction* f_{N} *sur* $[0,1]$ *par* $f_{\mathrm{N}}(x) = \min(f(x),\mathrm{N})$ *; vérifier que* $\{f_{\mathrm{N}} > \mathrm{N}\} = \emptyset$, *et que* $\{f_{\mathrm{N}} > t\} = \{f>t\}$ *pour tout* $t<\mathrm{N}$ *; en déduire que* f_{N} *possède aussi la propriété* (P_α).

Montrer que pour $1<p<+\infty$, *on a*

$$\int_0^1 f_{\mathrm{N}}(x)^p\,\mathrm{d}x \le \frac{p}{p-1}\int_0^1 f_{\mathrm{N}}(x)^{p-1} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Dans le cas $p=2$, *en déduire que*

$$\Big(\int_0^1 f_{\mathrm{N}}(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \le 2\Big(\int_0^1 g_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

Solution. — La fonction f_{N} est $\le \mathrm{N}$ par définition, donc $\{f_{\mathrm{N}}>\mathrm{N}\} = \emptyset$; par ailleurs, on a $f_{\mathrm{N}} \le f$ donc $\{f_{\mathrm{N}}>t\} \subset \{f>t\}$ pour tout t ; inversement, si $\mathrm{N}>t$ et $f(x)>t$, alors $f_{\mathrm{N}}(t) = \min(\mathrm{N}, f(x)) > t$, on a donc $\{f_{\mathrm{N}}>t\} = \{f>t\}$ quand $t<\mathrm{N}$.

Vérifions (P_α) pour la fonction f_{N}. Pour $t \ge \mathrm{N}$, on a

$$t\lambda\big(\{f_{\mathrm{N}}>t\}\big) = t\lambda(\emptyset) = 0,$$

qui est certainement inférieur ou égal au second membre de (P_α). Si $0 \le t < \mathrm{N}$, les deux ensembles $\{f > t\}$ et $\{f_\mathrm{N} > t\}$ sont égaux, par conséquent

$$t\lambda\bigl(\{f_\mathrm{N} > t\}\bigr) = t\lambda\bigl(\{f > t\}\bigr) \le \int_0^1 \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x) g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{f_\mathrm{N}>t\}}(x) g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x,$$

donc f_N vérifie la propriété (P_α).

D'après le résultat de la question précédente appliqué à f_N, d'après la propriété (P_α) de f_N et d'après un calcul analogue à celui de la question b, on obtient

$$\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^p\,\mathrm{d}x = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\lambda\bigl(\{f_\mathrm{N} > t\}\bigr)\,\mathrm{d}t = p\int_0^{+\infty} t^{p-2}\Bigl(t\lambda\bigl(\{f_\mathrm{N} > t\}\bigr)\Bigr)\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le p\int_0^{+\infty} t^{p-2}\Bigl(\int_0^1 \mathbf{1}_{\{f_\mathrm{N}>t\}}(x) g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}t = p\int_0^1 \Bigl(\int_0^{+\infty} t^{p-2}\mathbf{1}_{\{f_\mathrm{N}>t\}}(x)\,\mathrm{d}t\Bigr) g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= p\int_0^1 \Bigl(\frac{f_\mathrm{N}(x)^{p-1}}{p-1}\Bigr) g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $\alpha < 1$, la fonction g_α est dans $\mathrm{L}^1([0,1],\mathcal{B},\lambda)$, et f_N est bornée par N donc

$$\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^{p-1} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \le \mathrm{N}^{p-1}\int_0^1 g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{N}^{p-1}}{1-\alpha} < +\infty.$$

Dans le cas $p = 2$, on continue avec Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^2\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{2-1}\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^{2-1} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f_\mathrm{N}(x) g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le 2\Bigl(\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^2\,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int_0^1 g_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/2}.$$

La fonction f_N est bornée, donc l'intégrale de f_N^2 sur $[0,1]$ est finie. Si l'intégrale de g_α^2 est infinie, l'inégalité voulue est vraie ; si $\int_0^1 f_\mathrm{N}^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$, le résultat est clair aussi, sinon on divise les deux côtés par

$$\Bigl(\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^2\,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/2} > 0$$

pour obtenir le résultat voulu.

d. Déduire des questions précédentes le résultat suivant : si $0 < \alpha < 1/2$ *et si la fonction* f *vérifie la propriété* (P_α)*, alors* f *est élément de* $\mathrm{L}^2([0,1],\mathcal{B},\lambda)$ *et*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2} \le \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}}.$$

Solution. — On obtient ici

$$\int_0^1 g_\alpha(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-2\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-2\alpha},$$

donc pour tout N

$$\int_0^1 f_\mathrm{N}(x)^2\,\mathrm{d}x \le \frac{4}{1-2\alpha}.$$

Quand N tend vers l'infini, f_N^2 tend en croissant vers f^2, donc par le théorème de convergence monotone, on obtient à la limite

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \le \frac{4}{1-2\alpha}.$$

— *Exercice III* —

a. Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, *et suivant la loi exponentielle* $\mathrm{d}\mu(x) = \mathbf{1}_{x\geqslant 0}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ *; pour* $a, b > 0$ *donnés, déterminer la fonction de répartition de* $\mathrm{V} = \max(\mathrm{X}/a, \mathrm{Y}/b)$. *La loi de* V *admet-elle une densité ? Calculer l'espérance de* V.

Solution. — Pour une variable aléatoire X de loi μ on a pour tout $t > 0$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \le t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

On a

$$(\mathrm{V} \le t) = (\mathrm{X} \le at) \cap (\mathrm{Y} \le bt)$$

donc par indépendance, pour tout $t \ge 0$,

$$\mathrm{F_V}(t) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \le t) = (1 - \mathrm{e}^{-at})(1 - \mathrm{e}^{-bt}) = 1 - \mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt} + \mathrm{e}^{-(a+b)t}.$$

La fonction de répartition $\mathrm{F_V}$ obtenue est continue et de classe C^1 par morceaux (en fait elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$). On obtient la densité f_V de la loi de V en dérivant $\mathrm{F_V}$,

$$f_\mathrm{V}(t) = \big(a\,\mathrm{e}^{-at} + b\,\mathrm{e}^{-bt} - (a+b)\,\mathrm{e}^{-(a+b)t}\big)\mathbf{1}_{t\geqslant 0}.$$

Comme V est ≥ 0 presque sûrement, on a

$$\mathrm{E\,V} = \int_0^{+\infty} t f_\mathrm{V}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(at\,\mathrm{e}^{-at} + bt\,\mathrm{e}^{-bt} - (a+b)t\,\mathrm{e}^{-(a+b)t}\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}.$$

b. On considère maintenant une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ *de v.a. exponentielles indépendantes de même loi* μ *(donnée dans la question a), et pour tout entier* $n \ge 2$ *on pose*

$$\mathrm{Z}_n = \max\Big(\frac{\mathrm{X}_2}{\ln 2}, \ldots, \frac{\mathrm{X}_n}{\ln n}\Big).$$

Montrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \le t) = \prod_{k=2}^{n}\Big(1 - \frac{1}{k^t}\Big).$$

Solution. — Pour tout $k \ge 2$ on a pour $t > 0$

$$\mathrm{P}\Big(\frac{\mathrm{X}_k}{\ln k} \le t\Big) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_k \le t\ln k) = 1 - \mathrm{e}^{-t\ln k} = 1 - k^{-t}.$$

Ensuite,

$$(\mathrm{Z}_n \le t) = \bigcap_{k=2}^{n}\Big(\frac{\mathrm{X}_k}{\ln k} \le t\Big)$$

donc par indépendance

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \le t) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_2 \le t\ln 2)\ldots\mathrm{P}(\mathrm{X}_n \le t\ln n) = \prod_{k=2}^{n}\Big(1 - \frac{1}{k^t}\Big).$$

c. En utilisant les inégalités (qu'on pourra admettre) $1 - u \le \mathrm{e}^{-u}$, *valable pour tout nombre réel* u, *et* $\mathrm{e}^{-2u} \le 1 - u$, *valable pour* $0 \le u \le 1/2$, *montrer que pour tout* $t \ge 1$, *on a l'encadrement suivant pour la fonction de répartition* $\mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}$ *de la v.a.* Z_n,

$$\mathrm{e}^{-2\mathrm{S}_n(t)} \le \mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(t) \le \mathrm{e}^{-\mathrm{S}_n(t)}, \quad \text{où} \quad \mathrm{S}_n(t) = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^t}.$$

Solution. — Pour $k \geq 2$ et $t \geq 1$ on a $k^{-t} \leq 1/2$ ce qui permet d'appliquer la deuxième inégalité,

$$\mathrm{e}^{-2k^{-t}} \leq 1 - k^{-t}$$

donc

$$\mathrm{e}^{-2\mathrm{S}_n(t)} = \prod_{k=2}^{n} \mathrm{e}^{-2k^{-t}} \leq \prod_{k=2}^{n} (1 - k^{-t}) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \leq t) = \mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(t).$$

On a aussi

$$0 < 1 - k^{-t} \leq \mathrm{e}^{-k^{-t}},$$

donc

$$\mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(t) = \prod_{k=2}^{n} (1 - k^{-t}) \leq \mathrm{e}^{-\mathrm{S}_n(t)}\,.$$

d. On définit une fonction Z *de* Ω *dans* $[0, +\infty]$ *par* $\omega \in \Omega \to \mathrm{Z}(\omega) = \sup_{n \geqslant 2} \mathrm{Z}_n(\omega)$, *valeur finie ou égale à* $+\infty$ *; indiquer pourquoi* Z *est* $\mathcal{F}$*-mesurable. Montrer que*

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1) = \lim_n \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \leq 1) = \lim_n \mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(1) = 0.$$

On pose $\mathrm{S}(t) = \lim_n \mathrm{S}_n(t)$ *pour tout* $t > 1$*. Vérifier que pour tout réel* $t > 1$, $\mathrm{S}(t)$ *est fini et que*

$$1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{S}(t)} \leq \mathrm{P}(\mathrm{Z} > t) \leq 1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{S}(t)}\,.$$

En utilisant une comparaison avec une intégrale portant sur la fonction $x \to x^{-t}$*, montrer que pour tout* $t > 1$*, on a*

$$\mathrm{S}(t) \leq 2^{-t} + \frac{2^{1-t}}{t-1}\cdot$$

Montrer que

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = +\infty) = 0.$$

Solution. — La variable aléatoire Z est mesurable, comme sup de la famille (Z_n) dénombrable de fonctions mesurables, et on a

$$\{\mathrm{Z} \leq t\} = \bigcap_{n \geqslant 2} \{\mathrm{Z}_n \leq t\}.$$

Comme la suite (Z_n) est croissante, Z est aussi la limite croissante de la suite (Z_n) et

$$\big(\{\mathrm{Z}_n \leq t\}\big)_{n \geqslant 2}$$

est une suite décroissante d'ensembles ; comme la mesure de probabilité P est finie, on peut passer à la limite dans les suites décroissantes d'ensembles et obtenir pour tout réel t

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq t) = \lim_n \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \leq t).$$

En particulier quand $t = 1$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1) = \lim_n \mathrm{P}(\mathrm{Z}_n \leq 1) = \lim_n \mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(1).$$

D'après la question précédente, on a pour tout $n \geq 2$ l'inégalité

$$\mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(1) \leq \exp\Big(-\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\Big),$$

et le terme de droite tend vers 0 puisque la série à termes positifs $\sum 1/k$ a une somme infinie.

Sans utiliser l'encadrement, on pouvait remarquer directement que

$$\mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(1) = \prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k}\Big) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2.3\ldots(n-1).n} = \frac{1}{n}$$

tend vers 0.

On voit que

$$\mathrm{S}(t) = \lim_{n} \mathrm{S}_n(t) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^t}$$

est fini pour $t > 1$ (série de Riemann convergente). En passant à la limite dans l'inégalité de la question c, on obtient

$$\mathrm{e}^{-2\mathrm{S}(t)} \leq \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq t) \leq \mathrm{e}^{-\mathrm{S}(t)},$$

d'où le résultat demandé pour l'encadrement de $\mathrm{P}(\mathrm{Z} > t) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq t)$.

On note que pour $k \geq 2$ et $t > 0$, on a

$$\frac{1}{k^t} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{x^t},$$

d'où pour tout $t > 1$

$$\mathrm{S}(t) = 2^{-t} + \sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{k^t} \leq 2^{-t} + \int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^t} = 2^{-t} + \Big[\frac{x^{1-t}}{1-t}\Big]_{x=2}^{+\infty} = 2^{-t} + \frac{2^{1-t}}{t-1}.$$

On en déduit que $\mathrm{S}(t) \longrightarrow 0$ quand t tend vers $+\infty$, donc $\mathrm{e}^{-2\mathrm{S}(t)} \longrightarrow 1$ et

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = +\infty) = \lim_{t\to+\infty}\mathrm{P}(\mathrm{Z} > t) \leq \lim_{t\to+\infty}\big(1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{S}(t)}\big) = 0.$$