Intégration et Probabilités (M43050) **2009-2010**

Examen partiel du mardi 30 mars 2010 durée : 2 heures

On pourra admettre le résultat d'une question et traiter les questions suivantes.

— *Exercice I* —

a. Montrer que pour tout $y \geq 0$, la fonction

$$x \in [0, +\infty[\to \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}$$

est Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que la fonction F définie par

$$\forall y \geq 0, \quad \mathrm{F}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est continue sur $[0, +\infty[$. Montrer que F est de classe C^1 sur l'ouvert $]0, +\infty[$.

b. Montrer que pour tout $y > 0$, on a

$$\mathrm{F}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{y\,\mathrm{e}^{-u}}{y^2+u^2}\,\mathrm{d}u\,;$$

montrer que $y\mathrm{F}(y)$ tend vers une limite quand $y \to +\infty$, et donner la valeur de cette limite. La fonction F est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$?

c. Montrer que

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{\mathrm{F}(0) - \mathrm{F}(y)}{y} = \lim_{y \searrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{y(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

d. Montrer qu'il existe une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n h^n$ de rayon de convergence ≥ 1 telle que

$$-1 < h < 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}(1+h) = \sum_{n \geqslant 0} a_n h^n$$

(on pourra commencer par étudier le cas $-1 < h < 0$). Est-il possible que le rayon de convergence de cette série entière soit > 1 ?

— *Exercice II* —

a. Pour chaque entier $n \geq 1$ on considère le sous-ensemble F_n de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathrm{F}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Big[\frac{k}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{k}{n} + \frac{1}{n^3}\Big].$$

Calculer la mesure de Lebesgue $\lambda(\mathrm{F}_n)$ de l'ensemble F_n. Vérifier que $\sum \lambda(\mathrm{F}_n) < +\infty$.

b. On considère l'ensemble E formé de tous les nombres réels irrationnels x vérifiant les propriétés suivantes : $0 < x < 1$ et pour tout $n \geq 1$, il existe $p \geq 1$ entier et $q > n$ entier tels que

$$\Big|x - \frac{p}{q}\Big| \leq \frac{1}{q^3}.$$

Montrer que E est un ensemble borélien.

c. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a la majoration $\sum_{q>n} 1/q^2 < 1/n$.

L'entier $n_0 \geq 1$ étant fixé, majorer la mesure $\lambda(\mathrm{E}_{n_0})$ de l'ensemble $\mathrm{E}(n_0)$ formé des nombres réels x tels que $0 < x < 1$ et tels qu'il existe $p \geq 1$ et $q > n_0$ entiers vérifiant $\big|x - p/q\big| \leq 1/q^3$.

Montrer que E est de mesure de Lebesgue nulle.

d. (*Question bonus, notée hors barème*). Donner une condition suffisante portant sur la suite d'entiers $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots$ pour que le nombre $x = \sum_{k \geqslant 1} 10^{-n_k}$ soit élément de E.