Intégration et Probabilités (M43050) **2009-2010**

Corrigé de l'examen partiel du mardi 30 mars 2010

— *Exercice I* —

a. Montrer que pour tout $y \ge 0$*, la fonction*

$$x \in [0, +\infty[\;\to\; \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}$$

est Lebesgue-intégrable sur $[0, +\infty[$*. Montrer que la fonction* F *définie par*

$$\forall y \ge 0, \quad \mathrm{F}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

est continue sur $[0, +\infty[$*. Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur l'ouvert* $]0, +\infty[$*.*

Solution. — Posons $\mathrm{X} = [0, +\infty[$ pour abréger. Pour chaque $y \ge 0$ fixé, la fonction f_y définie sur X par $f_y(x) = \mathrm{e}^{-xy}/(1+x^2)$ est continue sur X, donc mesurable (elle est borélienne). Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a $xy \ge 0$, $\mathrm{e}^{-xy} \le 1$ et

$$0 \le f_y(x) \le \frac{1}{1+x^2} \;;$$

cette dernière fonction (qui est la fonction f_0 correspondant à $y = 0$) a une intégrale finie ; on sait en utilisant la primitive Arctan que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

mais on peut dire aussi que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \le 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 2 < +\infty.$$

Il en résulte bien que f_y est intégrable sur X pour tout $y \ge 0$.

Pour prouver la continuité de F sur $[0, +\infty[$, considérons

$$f(x, y) = \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}.$$

La fonction F est obtenue en considérant l'intégrale en x de $f(x, y)$, intégrale dépendant du paramètre $y \ge 0$. On voit que $y \to f(x, y)$ est continue pour tout $x \in \mathrm{X}$, et on a la majoration

$$0 \le f(x, y) = \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} = f_0(x) \;;$$

le majorant f_0 est une fonction intégrable sur X, donc F est continue sur $[0, +\infty[$ d'après le cours.

Pour la dérivabilité, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x\,\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2} \;;$$

pour montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert $]0, +\infty[$, il suffit de montrer que f est de classe C^1 sur chaque intervalle $\mathrm{J} =]y_0, +\infty[$, $y_0 > 0$ fixé. Pour les valeurs de y dans J, on va majorer la dérivée partielle en utilisant l'inégalité $u\,\mathrm{e}^{-u} \le 1$, valable pour tout $u \ge 0$, qui résulte du fait (évident par examen de la série entière) que $u < \mathrm{e}^u$ pour $u \ge 0$; on a pour $y > y_0$ et $x \in \mathrm{X}$

$$\Bigl|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Bigr| \le \frac{x\,\mathrm{e}^{-xy_0}}{1+x^2} = \frac{1}{y_0}\,\frac{xy_0\,\mathrm{e}^{-xy_0}}{1+x^2} \le \frac{1}{y_0}\,\frac{1}{1+x^2}$$

qui est intégrable sur X d'après ce qui précède. On déduit d'abord que pour tout $y > y_0$,

$$\mathrm{F}'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{-x\,\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

et de plus la fonction $y \to -x\,\mathrm{e}^{-xy}/(1+x^2)$ sous l'intégrale est continue sur $\mathrm{J} =]y_0, +\infty[$, et on l'a déjà majorée par la fonction intégrable $y_0^{-1} f_0$, donc F' est continue sur J d'après le théorème de continuité sous l'intégrale.

b. Montrer que pour tout $y > 0$, on a

$$\mathrm{F}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{y\,\mathrm{e}^{-u}}{y^2+u^2}\,\mathrm{d}u\,;$$

montrer que $y\mathrm{F}(y)$ tend vers une limite quand $y \to +\infty$, et donner la valeur de cette limite. La fonction F *est-elle intégrable sur* $[0, +\infty[$ *?*

Solution. — Pour $y > 0$ fixé, et pour un $\mathrm{A} > 0$ destiné à tendre vers l'infini, effectuons le changement de variable $u = xy$ pour obtenir

$$\int_0^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{A}y} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+u^2/y^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{y} = \int_0^{\mathrm{A}y} \frac{y\,\mathrm{e}^{-u}}{y^2+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Quand A tend vers $+\infty$, on a $\mathrm{A}y \to +\infty$ puisque $y > 0$, et on obtient à la limite

$$\mathrm{F}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{y\,\mathrm{e}^{-u}}{y^2+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On a donc

$$y\mathrm{F}(y) = \int_0^{+\infty} \frac{y^2\,\mathrm{e}^{-u}}{y^2+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Considérons une suite (y_n) tendant vers $+\infty$ et posons

$$g_n(u) = \frac{y_n^2\,\mathrm{e}^{-u}}{y_n^2+u^2} = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+u^2/y_n^2}\ ;$$

on voit que pour tout $u \in \mathrm{X}$,

$$g_n(u) \to \mathrm{e}^{-u}$$

et

$$0 \le g_n(u) \le \mathrm{e}^{-u}$$

qui est intégrable sur X ; d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_n y_n\mathrm{F}(y_n) = \lim_n \int_0^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1.$$

Comme on trouve ce même résultat pour n'importe quelle suite (y_n) tendant vers $+\infty$, on déduit que $y\mathrm{F}(y)$ tend vers 1 lorsque $y \to +\infty$. Il en résulte que $\mathrm{F}(y) \sim 1/y$ en $+\infty$, donc l'intégrale de F est infinie.

c. Montrer que

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{\mathrm{F}(0)-\mathrm{F}(y)}{y} = \lim_{y \searrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xy}}{y(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Solution. — On considère maintenant une suite (y_n) tendant vers 0, et

$$h_n(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-xy_n}}{y_n(1+x^2)}.$$

Quand y tend vers 0, le quotient $(1-\mathrm{e}^{-xy})/y$ tend vers x, donc

$$h_n(x) \to \frac{x}{1+x^2}.$$

La suite (h_n) est formée de fonctions mesurables positives ; d'après le lemme de Fatou,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \liminf_n \int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_n \frac{\mathrm{F}(0)-\mathrm{F}(y_n)}{y_n}\ ;$$

mais l'intégrale de gauche est infinie,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{A}^2) = +\infty.$$

On a donc

$$\lim_n \frac{\mathrm{F}(0)-\mathrm{F}(y_n)}{y_n} = +\infty,$$

pour toute suite (y_n) qui tend vers 0 par valeurs > 0, ce qui montre le résultat.

d. Montrer qu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n h^n$ *de rayon de convergence* ≥ 1 *telle que*

$$-1 < h < 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}(1+h) = \sum_{n\geqslant 0} a_n h^n$$

(on pourra commencer par étudier le cas $-1 < h < 0$*). Est-il possible que le rayon de convergence de cette série entière soit* > 1 *?*

Solution. — Commençons par $h = -k$, $k \ge 0$. On a

$$\mathrm{F}(1-k) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x(1-k)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

En développant e^{kx} en série entière et en utilisant le théorème de convergence monotone, version séries de fonctions ≥ 0, on obtient pour tout $k < 1$

$$\mathrm{F}(1-k) = \int_0^{+\infty} \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!(1+x^2)}\Bigr)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigl(\int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\Bigr) k^n,$$

qui est bien une série entière $\sum b_n k^n$ dans la variable k, avec

$$b_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Comme l'intégrale qui définit $\mathrm{F}(1-k)$ est finie pour tout k tel que $0 \le k < 1$, on déduit que la série entière $\sum b_n k^n$ converge pour toutes ces valeurs de k, donc son rayon de convergence est ≥ 1.

Pour $h > 0$ on a

$$\mathrm{F}(1+h) = \int_0^{+\infty} \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{h^n x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!(1+x^2)}\Bigr)\,\mathrm{d}x.$$

Supposons $0 < h < 1$. Les sommes partielles de la série de fonctions sous l'intégrale sont majorées par les sommes partielles correspondant à $k = -h$,

$$\Bigl|\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n \frac{h^n x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!(1+x^2)}\Bigr| \le \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{|h|^n x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!(1+x^2)} \le \frac{\mathrm{e}^{-x(1-|h|)}}{1+x^2},$$

donc bornées par une fonction intégrable fixe, ce qui justifie le passage à la limite

$$\mathrm{F}(1+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{x^n \,\mathrm{e}^{-x}}{n!(1+x^2)} \,\mathrm{d}x \Big) h^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n h^n.$$

On obtient le résultat demandé, avec $a_n = (-1)^n b_n$.

Si le rayon de convergence était $\rho > 1$, la somme de la série définirait une fonction $h \to \mathrm{S}(h)$ de classe C^1 sur $]-\rho, \rho[$, et l'égalité $\mathrm{F}(y) = \mathrm{S}(y-1)$, valable pour $0 < y < 2$, pourrait se prolonger par continuité en 0, donnant $\mathrm{F}(0) = \mathrm{S}(-1)$; mais S est dérivable au point -1 qui est dans le disque ouvert de convergence, donc

$$\frac{\mathrm{F}(0) - \mathrm{F}(y)}{y} = \frac{\mathrm{S}(-1) - \mathrm{S}(y-1)}{y}$$

tend vers la limite finie $-\mathrm{S}'(-1)$, en contradiction avec le résultat de la question c. On a donc montré que $\rho \le 1$.

— *Exercice II* —

a. Pour chaque entier $n \ge 1$ on considère le sous-ensemble F_n de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathrm{F}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Big[\frac{k}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{k}{n} + \frac{1}{n^3} \Big].$$

Calculer la mesure de Lebesgue $\lambda(\mathrm{F}_n)$ de l'ensemble F_n. Vérifier que $\sum \lambda(\mathrm{F}_n) < +\infty$.

Solution. — Pour $n = 1$ il n'y a qu'un seul intervalle dans la définition de F_1, correspondant à $k = 1$, et $\mathrm{F}_1 = [0, 2]$ est de mesure 2. Pour $n \ge 2$ on remarque que les segments successifs sont disjoints : pour $1 \le k < n$ on a

$$\frac{k}{n} + \frac{1}{n^3} < \frac{k+1}{n} - \frac{1}{n^3} \,;$$

en effet, cela équivaut à

$$\frac{2}{n^3} < \frac{1}{n}$$

ou bien à $2 < n^2$, inégalité qui est vraie pour tout $n \ge 2$. L'ensemble F_n est donc formé de n segments disjoints de longueur $2/n^3$, donc

$$\lambda(\mathrm{F}_n) = n \frac{2}{n^3} = \frac{2}{n^2},$$

et ce résultat est valable aussi pour $n = 1$.

La série des longueurs est une série de Riemann $\sum n^{-\alpha}$ convergente, puisque $\alpha = 2 > 1$; on va retrouver ce résultat dans la majoration demandée à la question c.

b. On considère l'ensemble E *formé de tous les nombres réels irrationnels x vérifiant les propriétés suivantes : $0 < x < 1$ et pour tout $n \geq 1$, il existe $p \geq 1$ entier et $q > n$ entier tels que*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^3}.$$

Montrer que E *est un ensemble borélien.*

Solution. — Considérons d'abord l'ensemble E^* formé de tous les réels x vérifiant la propriété suivante : pour tout entier $n \geq 1$, il existe $p \geq 1$ entier et $q > n$ entier tels que

$$(*) \qquad \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^3}.$$

Pour un $q > 0$ fixé, l'ensemble des x vérifiant l'inégalité ci-dessus pour un $p \geq 1$ est la réunion dénombrable de fermés

$$\mathrm{A}_q = \bigcup_{p \geqslant 1} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}\right],$$

qui est un borélien ; pour $n \geq 1$ fixé, les x vérifiant l'inégalité pour un $q > n$ forment l'ensemble borélien

$$\mathrm{B}_n = \bigcup_{q > n} \mathrm{A}_q$$

et

$$\mathrm{E}^* = \bigcap_{n \geqslant 1} \mathrm{B}_n$$

est borélien en tant qu'intersection dénombrable de boréliens. Finalement, l'ensemble E ne retient de E^* que la partie irrationnelle et contenue dans $]0, 1[$, à savoir

$$\mathrm{E} = \big(\mathrm{E}^* \cap]0, 1[\big) \setminus \mathbb{Q} \,;$$

cet ensemble est borélien, comme différence de deux boréliens (l'ensemble des rationnels est réunion dénombrable de fermés, les singletons rationnels).

c. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a la majoration $\sum_{q>n} 1/q^2 < 1/n$.

Solution. — La fonction $x \to 1/x^2$ est décroissante, donc $1/x^2 - 1/q^2$ est continue, positive sur l'intervalle $[q-1, q]$, non identiquement nulle, donc

$$0 < \int_{q-1}^{q} \Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{q^2}\Big)\, \mathrm{d}x,$$

donc

$$\frac{1}{q^2} < \int_{q-1}^{q} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

En sommant sur $q > n$ on obtient

$$\sum_{q>n} \frac{1}{q^2} < \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{n}.$$

L'entier $n_0 \geq 1$ étant fixé, majorer la mesure $\lambda(\mathrm{E}_{n_0})$ de l'ensemble E_{n_0} formé des nombres réels x tels que $0 < x < 1$ et tels qu'il existe $p \geq 1$ et $q > n_0$ entiers vérifiant $\left|x - p/q\right| \leq 1/q^3$.

Solution. — L'inégalité précédente donne

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3} \le x < 1$$

donc $p < q + 1/q^2$, et comme p est entier et $q > 1$, on a $p \le q$. Pour un $q > n_0$ fixé, on voit que l'ensemble des x vérifiant l'inégalité pour un $p \ge 1$ est

$$\bigcup_{p=1}^{q} \Big[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}\Big] = \mathrm{F}_q.$$

L'ensemble E_{n_0} est la réunion des F_q pour tous les $q > n_0$, donc

$$\lambda(\mathrm{E}_{n_0}) \le \sum_{q>n_0} \lambda(\mathrm{F}_q) = \sum_{q>n_0} \frac{2}{q^2} < \frac{1}{n_0}.$$

Montrer que E *est de mesure de Lebesgue nulle.*

Solution. — Pour tout n_0, l'ensemble E est contenu dans E_{n_0}, donc $\lambda(\mathrm{E}) \le \lambda(\mathrm{E}_{n_0}) < 1/n_0$ pour tout $n_0 > 1$, ce qui implique que $\lambda(\mathrm{E}) = 0$.

d. (Question bonus, notée hors barème). Donner une condition suffisante portant sur la suite d'entiers $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots$ *pour que le nombre* $x = \sum_{k\geqslant 1} 10^{-n_k}$ *soit élément de* E.

Solution. — Fixons un entier $\mathrm{K} > 1$; si on pose

$$x_{\mathrm{K}} = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} 10^{-n_k} = \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \frac{10^{n_{\mathrm{K}}-n_k}}{10^{n_{\mathrm{K}}}} = \frac{\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} 10^{n_{\mathrm{K}}-n_k}}{10^{n_{\mathrm{K}}}},$$

on voit que x_{K} est un rationnel de la forme p/q avec p entier ≥ 1 et $q = 10^{n_{\mathrm{K}}}$. On a

$$0 < x - x_{\mathrm{K}} = \sum_{k=\mathrm{K}+1}^{+\infty} 10^{-n_k} \le \sum_{m \geqslant n_{\mathrm{K}+1}} 10^{-m} = \frac{10}{9}\, 10^{-n_{\mathrm{K}+1}}.$$

Le nombre x vérifiera l'inégalité $(*)$ pour une suite de valeurs de $q_{\mathrm{K}} = 10^{n_{\mathrm{K}}}$ tendant vers l'infini si par exemple

$$|x - x_{\mathrm{K}}| \le \frac{10}{9}\, 10^{-n_{\mathrm{K}+1}} \le \frac{1}{q_{\mathrm{K}}^3} = 10^{-3n_{\mathrm{K}}}$$

pour tout K, c'est-à-dire si

$$n_{\mathrm{K}+1} > 3n_{\mathrm{K}}$$

pour tout K, ce qui est le cas par exemple si $n_{\mathrm{K}} = 4^{\mathrm{K}}$. En fait, il suffirait que $n_{\mathrm{K}+1} > 3n_{\mathrm{K}}$ soit satisfaite pour une sous-suite (K_j) de valeurs de K tendant vers l'infini.

Le nombre x est alors irrationnel, car son développement décimal n'est pas périodique à partir d'un certain rang : en effet, ce développement contient des successions de 0 de longueur $\ge n_{\mathrm{K}+1} - n_{\mathrm{K}} - 1 \ge 2n_{\mathrm{K}}$, qui tendent vers l'infini. Si le développement était périodique à partir d'un certain rang, il serait nul à partir de ce rang, ce qui n'est pas le cas.