Intégration et Probabilités (M43050) **2009-2010**

Examen de rattrapage du lundi 14 juin 2010 durée : 3 heures

On pourra admettre le résultat d'une question et traiter les questions suivantes. On rappelle que pour tout s réel, on a $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2+\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-s^2/2}$.

— *Exercice I* —

a. Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

b. Donner les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0, \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^\alpha + |x|^{1/\alpha}}$$

est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$; pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $x \to x f_\alpha(x)$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$?

On pose pour $\alpha \neq 1$ et $y \in \mathbb{R}$

$$g_\alpha(y) = \int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que g_α est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\alpha > 2$, la fonction g_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. On pose pour tout x réel

$$\mathrm{J}(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos(\theta)}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Montrer qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que $\mathrm{J}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout x réel ; exprimer a_n sous la forme d'une intégrale ; vérifier que $n!\,|a_n| \leq 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

d. On pose pour s et t réels

$$\mathrm{F}(s,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2+\mathrm{i}(xs+yt)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Déterminer la valeur de cette intégrale double. Pour $\rho \geq 0$ et φ réel, montrer au moyen d'une intégration en coordonnées polaires que

$$\mathrm{F}\big(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi)\big) = 2\pi\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2/2}\,\mathrm{J}(r\rho)\,r\,\mathrm{d}r.$$

Montrer que pour tout réel $v > 0$ on a l'égalité $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{J}(2\sqrt{uv})\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-v}$. En déduire la valeur des coefficients $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la série entière de la fonction J.

— *Exercice II* —

— *Dans tout l'exercice, on considère un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *; on désigne par* γ *la probabilité gaussienne centrée réduite sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$*, définie par* $\mathrm{d}\gamma(x) = (2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.

Première partie

a. Si $(\mathrm{A}_k)_{k\geqslant 0} \subset \mathcal{F}$ est une suite d'événements telle que $\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) < +\infty$, montrer que

$$\int_\Omega \Big(\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}(\omega)\Big)\,\mathrm{dP}(\omega) < +\infty\,;$$

montrer que pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $k_0(\omega)$ tel que pour tout $k \geq k_0(\omega)$, on ait que $\omega \notin \mathrm{A}_k$.

TOURNEZ S.V.P.

b. On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}-\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

Calculer $\mathrm{F}(0)$ et $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$; étudier la variation de F sur $[0,+\infty[$ et en déduire que $\mathrm{F}(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 0$. Si G est une variable aléatoire de loi γ définie sur Ω, montrer que pour tout nombre réel $t\geq 0$, on a $\mathrm{P}(|\mathrm{G}|>t)\leq \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

c. Si t est réel et si $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$ sont des variables aléatoires réelles définies sur Ω, montrer que

$$\mathrm{P}\big(\max(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)>t\big)\leq\sum_{j=1}^{n}\mathrm{P}(\mathrm{X}_j>t).$$

— *Dans toute la suite de l'exercice on désigne par $(\mathrm{G}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, toutes de loi γ ; on rappelle que la fonction caractéristique des variables aléatoires G_j est donnée par $\varphi_{\mathrm{G}_j}(s)=\mathrm{e}^{-s^2/2}$, pour tout s réel et tout $j\geq 1$.*

d. Si a_1 et a_2 sont deux nombres réels, déterminer la fonction caractéristique de $a_1\mathrm{G}_1+a_2\mathrm{G}_2$. Si n est un entier ≥ 1 et si les coefficients réels $c_1,\dots,c_n$ sont tels que $c_1^2+\cdots+c_n^2=1$, montrer que la variable aléatoire $\mathrm{G}=c_1\mathrm{G}_1+\cdots+c_n\mathrm{G}_n$ est de loi γ. Pour tout $t>0$ et pour tous coefficients réels $a_1,\dots,a_n$, montrer que

$$\mathrm{P}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n}a_j\mathrm{G}_j\Big|>t\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\Big)^{1/2}\Big)\leq \mathrm{e}^{-t^2/2}\,.$$

Deuxième partie

— *Pour tout entier $k\geq 0$, pour tout $\omega\in\Omega$ et tout $x\in[0,2\pi]$ on pose*

$$f_k(x,\omega)=\sum_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}\mathrm{G}_n(\omega)\,\frac{\sin(nx)}{n},\qquad \mathrm{F}_k(\omega)=\max\Big\{\Big|f_k\Big(\frac{2\pi j}{4^k},\omega\Big)\Big|:0\leq j<4^k\Big\}$$

$$\textit{et}\quad \mathrm{M}_k(\omega)=\max\{|\mathrm{G}_n(\omega)|:2^k\leq n<2^{k+1}\}.$$

On fixe un nombre réel $c>\sqrt{2\ln 2}$, de sorte que $2\,\mathrm{e}^{-c^2/2}<1$.

a. Vérifier que $\sum_{2^k\leqslant n<2^{k+1}}n^{-2}\leq 2^{-k}$. Montrer que pour tout x fixé,

$$\mathrm{P}\big(\{\omega\in\Omega:|f_k(x,\omega)|>2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}\}\big)\leq \mathrm{e}^{-2c^2k}\,.$$

Montrer que pour P-presque tout $\omega\in\Omega$, l'inégalité $\mathrm{F}_k(\omega)\leq 2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}$ est vraie pour k assez grand (assez grand dépendant de ω, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k_0(\omega)$ tel que l'inégalité soit vraie pour tout $k\geq k_0(\omega)$).

b. Vérifier que $\mathrm{P}(\mathrm{M}_k>t)\leq 2^k\,\mathrm{P}(|\mathrm{G}_1|>t)$ pour tout réel $t\geq 0$. Montrer que pour P-presque tout $\omega\in\Omega$, l'inégalité $\mathrm{M}_k(\omega)\leq c\sqrt{k}$ est vraie pour k assez grand.

c. Vérifier que $\big|f_k(x,\omega)-f_k(y,\omega)\big|\leq 2^k\mathrm{M}_k(\omega)|x-y|$ (utiliser $|\sin u-\sin v|\leq|u-v|$). Montrer que pour P-presque tout $\omega\in\Omega$, il existe un entier $k_0(\omega)$ tel que pour tout $k\geq k_0(\omega)$, on ait que

$$\forall x,y\in[0,2\pi],\quad \big|f_k(x,\omega)-f_k(y,\omega)\big|\leq c\sqrt{k}\,2^k|x-y|.$$

d. Montrer que pour P-presque tout $\omega\in\Omega$, l'inégalité

$$\max\big\{|f_k(x,\omega)|:x\in[0,2\pi]\big\}\leq \mathrm{F}_k(\omega)+2\pi 4^{-k}c\sqrt{k}\,2^k$$

est vraie pour k assez grand. En déduire que pour P-presque tout ω fixé, la série de fonctions de terme général $x\to f_k(x,\omega)$ a pour somme $x\to\sum_{k\geqslant 0}f_k(x,\omega)$ une fonction continue sur $[0,2\pi]$.