Intégration et Probabilités (M43050) **2009-2010**

Corrigé de l'examen de rattrapage du lundi 14 juin 2010

On rappelle que pour tout s réel, on a $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2+\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-s^2/2}$.

— *Exercice I* —

a. Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Solution. — Par intégration par parties, on a que pour tout $n > 0$ et tout réel $\mathrm{A} > 0$,

$$\int_0^{\mathrm{A}} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Bigl[-x^n\,\mathrm{e}^{-x}\Bigr]_0^{\mathrm{A}} + n\int_0^{\mathrm{A}} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{A}^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} + n\int_0^{\mathrm{A}} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\,;$$

quand A tend vers $+\infty$, on voit que $\mathrm{A}^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$ tend vers 0, d'après l'étude des croissances comparées des puissances et des exponentielles. On montre ainsi le premier résultat demandé.

Si on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, on a

$$\mathrm{I}_n = n\,\mathrm{I}_{n-1} = n(n-1)\mathrm{I}_{n-2} = \cdots = n!\,\mathrm{I}_0$$

et

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1,$$

donc $n!$ est la valeur de l'intégrale I_n.

b. Donner les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha(0) = 0 \quad \textit{et} \quad \forall x \neq 0, \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^\alpha + |x|^{1/\alpha}}$$

est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$; pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $x \to x f_\alpha(x)$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$?

On pose pour $\alpha \neq 1$ et $y \in \mathbb{R}$

$$g_\alpha(y) = \int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que g_α est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\alpha > 2$, la fonction g_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Solution. — Pour tout $\alpha > 0$, on voit que $f_\alpha = f_{1/\alpha}$, il suffit donc de résoudre le cas $0 < \alpha \le 1$. La fonction f_α est paire, et mesurable ≥ 0 ; on s'intéresse à la finitude de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \in [0, +\infty].$$

Quand $\alpha = 1$, on voit que

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x} = +\infty,$$

donc f_1 n'est pas Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour traiter le cas $\alpha \neq 1$, on écrit pour tout $x > 0$ que

$$x^\alpha \le x^\alpha + x^{1/\alpha}, \qquad x^{1/\alpha} \le x^\alpha + x^{1/\alpha},$$

par conséquent

$$f_\alpha(x) \le x^{-\alpha}, \qquad f_\alpha(x) \le x^{-1/\alpha}\,;$$

dans le cas $0 < \alpha < 1$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{-1/\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1/\alpha - 1} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} < +\infty.$$

Comme $f_\alpha = f_{1/\alpha}$, on conclut que f_α est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout nombre réel α qui est > 0 et différent de 1,

$$\alpha \in \,]0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[.$$

Par ailleurs,
$$\int_{\mathbb{R}} |x| f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^\alpha + x^{1/\alpha}}\,\mathrm{d}x \in [0,+\infty].$$
Si on suppose encore $0<\alpha<1$, l'intégrale
$$\int_0^1 x f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$$
est finie, donc l'intégrale de $|x|f_\alpha(x)$ sur $\mathbb{R}$ est finie si et seulement si l'intégrale
$$(*) \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^\alpha + x^{1/\alpha}}\,\mathrm{d}x$$
est finie ; puisque $0<\alpha<1$, on a l'inégalité $\alpha < 1/\alpha$ et la fonction sous l'intégrale est équivalente quand $x \to +\infty$ à
$$\frac{x}{x^{1/\alpha}} \sim x^{1-1/\alpha}\,;$$
l'intégrale $(*)$ est donc finie si et seulement si $1-1/\alpha < -1$, ce qui correspond à $0<\alpha<1/2$.

Compte tenu de l'égalité $f_\alpha = f_{1/\alpha}$, la réponse finale à la question de l'intégrabilité de la fonction $x \to x f_\alpha(x)$ est la suivante : il faut et il suffit que $0<\alpha<1/2$ ou $2<\alpha$,
$$\alpha \in]0,1/2[\cup]2,+\infty[.$$

Étudions maintenant la fonction $y \in \mathbb{R} \to g_\alpha(y)$ pour $\alpha \ne 1$; la fonction sous l'intégrale,
$$h(x,y) = f_\alpha(x)\cos(xy),$$
vérifie les propriétés suivantes : pour tout x fixé, la fonction $y \in \mathbb{R} \to f_\alpha(x)\cos(xy)$ est continue, et $h(x,y)$ admet la majoration
$$|h(x,y)| = |f_\alpha(x)\cos(xy)| \le f_\alpha(x)$$
par la fonction intégrable f_α, indépendante du paramètre y. D'après le théorème du cours sur la continuité des intégrales, la fonction g_α est continue sur $\mathbb{R}$.

On suppose ensuite $\alpha > 2$ et on cherche à dériver g_α ; on voit que la fonction h est dérivable par rapport à y,
$$\frac{\partial}{\partial y} h(x,y) = -x f_\alpha(x)\sin(xy)\,;$$
notons que cette dérivée dépend continûment de $y \in \mathbb{R}$. D'autre part, on a la majoration de la dérivée
$$|x f_\alpha(x)\sin(xy)| \le |x| f_\alpha(x)$$
par une fonction qui est intégrable puisque $\alpha > 2$. On en déduit que g_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g'_\alpha(y) = -\int_0^{+\infty} x f_\alpha(x)\sin(xy)\,\mathrm{d}x.$$

c. On pose pour tout x réel
$$\mathrm{J}(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\cos(\theta)}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$
Montrer qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que $\mathrm{J}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout x réel ; exprimer a_n sous la forme d'une intégrale ; vérifier que $n!\,|a_n| \le 1$ pour tout entier $n \ge 0$.

Solution. — En développant l'exponentielle en série entière, on obtient
$$\mathrm{J}(x) = \int_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}\,x\cos\theta)^n}{n!}\Bigr)\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}.$$

Pour intervertir intégrale et série, il suffit de montrer que

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\mathrm{i}\, x \cos\theta|^n}{n!} \Big) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} < +\infty,$$

ce qui est vrai puisque cette intégrale est dominée par

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \Big) \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \mathrm{e}^{|x|} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \mathrm{e}^{|x|} < +\infty.$$

On peut écrire par conséquent pour tout x réel

$$\mathrm{J}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{i}\cos\theta)^n}{n!} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \Big) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$a_n = \int_0^{2\pi} \frac{(\mathrm{i}\cos\theta)^n}{n!} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi},$$

et on peut majorer le module de a_n sous la forme

$$|a_n| \le \int_0^{2\pi} \frac{|\mathrm{i}\cos\theta|^n}{n!} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \le \frac{1}{n!} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} = \frac{1}{n!}.$$

d. On pose pour s et t réels

$$\mathrm{F}(s,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2 + \mathrm{i}(xs+yt)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Déterminer la valeur de cette intégrale double. Pour $\rho \ge 0$ et φ réel, montrer au moyen d'une intégration en coordonnées polaires que

$$\mathrm{F}\big(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi)\big) = 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2/2}\, \mathrm{J}(r\rho)\, r \,\mathrm{d}r.$$

Montrer que pour tout réel $v > 0$ on a l'égalité $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{J}(2\sqrt{uv}) \,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-v}$. En déduire la valeur des coefficients $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la série entière de la fonction J.

Solution. — Par le théorème de Fubini,

$$\mathrm{F}(s,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2 + \mathrm{i}(xs+yt)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2/2 + \mathrm{i}xs}\, \mathrm{e}^{-y^2/2+\mathrm{i}yt} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2+\mathrm{i}xs} \,\mathrm{d}x \Big) \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2+\mathrm{i}yt} \,\mathrm{d}y \Big),$$

qui est égal, d'après le résultat rappelé au début du corrigé, à

$$\sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-s^2/2} \,\sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-t^2/2} = 2\pi\, \mathrm{e}^{-(s^2+t^2)/2} = \mathrm{F}(s,t).$$

Si on passe en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on obtient

$$\mathrm{F}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2/2} \Big(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)} \,\mathrm{d}\theta \Big) r \,\mathrm{d}r.$$

Pour l'intégrale intérieure, on voit au moyen des formules de trigonométrie que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)} \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho\cos(\theta-\varphi)} \,\mathrm{d}\theta,$$

et comme la fonction de θ sous l'intégrale est 2π-périodique, on a que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho\cos(\theta-\varphi)} \,\mathrm{d}\theta = \int_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho\cos u} \,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\rho\cos u} \,\mathrm{d}u = 2\pi \mathrm{J}(r\rho).$$

On termine le calcul en écrivant

$$\mathrm{F}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = 2\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2/2}\, \mathrm{J}(r\rho) r\, \mathrm{d}r.$$

En comparant à la première expression donnée pour $\mathrm{F}(s,t)$, on obtient

$$\mathrm{e}^{-\rho^2/2} = \frac{\mathrm{F}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)}{2\pi} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2/2}\, \mathrm{J}(r\rho) r\, \mathrm{d}r.$$

Posons finalement $u = r^2/2$ et $v = \rho^2/2$, de sorte que $r^2\rho^2 = 4uv$, et

$$\mathrm{e}^{-v} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{J}\big(2\sqrt{uv}\big)\, \mathrm{d}u.$$

On a donc pour tout $v > 0$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(2\sqrt{uv}\big)^n\Big)\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-v}\,.$$

Si on peut justifier l'interversion, on écrira

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 2^n v^{n/2} \Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, u^{n/2}\, \mathrm{d}u\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k v^k}{k!}\,\cdot$$

Si on pose $v = w^2$ on obtient une égalité entre deux séries entières en w,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 2^n \Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, u^{n/2}\, \mathrm{d}u\Big) w^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, w^{2k}$$

pour tout $w > 0$, ce qui entraîne l'égalité des coefficients, et comme la série à droite définit une fonction paire, on déduit que $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \ge 0$; quand $n = 2p$, le coefficient de w^n est égal à

$$a_{2p} 2^{2p} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, u^p\, \mathrm{d}u = a_{2p} 2^{2p} p! = \frac{(-1)^p}{p!},$$

et donc

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p} p!\, p!}.$$

L'interversion série-intégrale est justifiée par le fait que la fonction S, égale à la somme de la série des modules des fonctions, est intégrable (on utilise la majoration de $|a_n|$ trouvée à la question *c*),

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(u)\, \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, |a_n| (2\sqrt{uv})^n\Big)\, \mathrm{d}u \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\sqrt{uv})^n}{n!}\Big)\, \mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u+2\sqrt{uv}}\, \mathrm{d}u \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u/2+2v}\, \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{e}^{2v} < +\infty,$$

où on a utilisé que $2\sqrt{uv} \le u/2 + 2v$ (développer le carré $(\sqrt{u/2} - \sqrt{2v})^2$).

— *Exercice II* —

— *Dans tout l'exercice, on considère un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$; *on désigne par* γ *la probabilité gaussienne centrée réduite sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, *définie par* $\mathrm{d}\gamma(x) = (2\pi)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x$.

Première partie

a. Si $(\mathrm{A}_k)_{k\geqslant 0} \subset \mathcal{F}$ *est une suite d'événements telle que* $\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) < +\infty$*, montrer que*

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}(\omega)\Bigr)\,\mathrm{dP}(\omega) < +\infty\,;$$

montrer que pour P*-presque tout* $\omega \in \Omega$*, il existe un entier* $k_0(\omega)$ *tel que pour tout* $k \geq k_0(\omega)$*, on ait que* $\omega \notin \mathrm{A}_k$*.*

Solution. — D'après le cours, on peut toujours intervertir intégrale et séries dans le cas de fonctions mesurables positives, donc

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}(\omega)\Bigr)\,\mathrm{dP}(\omega) = \sum_{k\geqslant 0} \int_\Omega \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}(\omega)\,\mathrm{dP}(\omega) = \sum_{k\geqslant 0} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) < +\infty.$$

Puisque la fonction mesurable $f \geq 0$ définie sur Ω par

$$f(\omega) = \sum_{k\geqslant 0} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}(\omega) \in [0, +\infty]$$

a une intégrale finie, il en résulte que $f(\omega)$ est fini pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, c'est-à-dire que l'ensemble

$$\mathrm{N} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty\} \in \mathcal{F}$$

vérifie $\mathrm{P}(\mathrm{N}) = 0$. Quand $\omega \notin \mathrm{N}$, on a

$$\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}(\omega) < +\infty,$$

et comme les termes de cette série numérique valent 0 ou 1, la convergence de la série numérique impose que le terme général soit nul pour k assez grand, dépendant de ω :

pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$, il existe un entier $k_0(\omega)$ tel que $k \geq k_0(\omega)$ entraîne $1_{\mathrm{A}_k}(\omega) = 0$, ce qui signifie que $\omega \notin \mathrm{A}_k$ pour $k \geq k_0(\omega)$.

b. On considère la fonction F *définie sur* $[0, +\infty[$ *par*

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} - \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

Calculer $\mathrm{F}(0)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$ *; étudier la variation de* F *sur* $[0, +\infty[$ *et en déduire que* $\mathrm{F}(x) \geq 0$ *pour tout* $x \geq 0$*. Si* G *est une variable aléatoire de loi* γ *définie sur* Ω*, montrer que pour tout nombre réel* $t \geq 0$*, on a* $\mathrm{P}(|\mathrm{G}| > t) \leq \mathrm{e}^{-t^2/2}$*.*

Solution. — Pour $x = 0$,

$$\mathrm{F}(0) = \frac{1}{2} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2}\Bigl(1 - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}\Bigr) = 0,$$

et la limite de $\mathrm{F}(x)$ quand $x \to +\infty$ est nulle,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = \Bigl(-\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigr)\,\mathrm{e}^{-x^2/2},$$

qui est ≥ 0 pour $0 \leq x \leq x_0 := \sqrt{2/\pi}$, et négatif ensuite. La fonction F croît de $\mathrm{F}(0) = 0$ à $\mathrm{F}(x_0)$, et ensuite elle est décroissante avec limite nulle à l'infini. Il en résulte que $\mathrm{F}(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, ou encore

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}, \qquad x \geq 0.$$

Pour la variable aléatoire G de l'énoncé, et pour $t \geq 0$,

$$\mathrm{P}(|\mathrm{G}| > t) = 2\mathrm{P}(\mathrm{G} > t) = 2\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2/2}\,\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2\pi}} \leq \mathrm{e}^{-t^2/2}\,.$$

c. Si t est réel et si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles définies sur Ω, montrer que

$$P\big(\max(X_1, \ldots, X_n) > t\big) \leq \sum_{j=1}^{n} P(X_j > t).$$

Solution. — On a

$$\big\{\max(X_1, \ldots, X_n) > t\big\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{X_j > t\}$$

d'où le résultat, puisque la probabilité d'une réunion finie d'événements est majorée par la somme des probabilités.

— *Dans toute la suite de l'exercice on désigne par $(G_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, toutes de loi γ ; on rappelle que la fonction caractéristique des variables aléatoires G_j est donnée par $\varphi_{G_j}(s) = \mathrm{e}^{-s^2/2}$, pour tout s réel et tout $j \geq 1$.*

d. Si a_1 et a_2 sont deux nombres réels, déterminer la fonction caractéristique de $a_1G_1 + a_2G_2$. Si n est un entier ≥ 1 et si les coefficients réels $c_1, \ldots, c_n$ sont tels que $c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1$, montrer que la variable aléatoire $G = c_1G_1 + \cdots + c_nG_n$ est de loi γ. Pour tout $t > 0$ et pour tous coefficients réels $a_1, \ldots, a_n$, montrer que

$$P\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} a_jG_j\Big| > t\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\Big)^{1/2}\Big) \leq \mathrm{e}^{-t^2/2}\,.$$

Solution. — On a pour $Y = a_1G_1 + a_2G_2$

$$\varphi_Y(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY} = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta_1G_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta_2G_2}\big)\,;$$

comme G_1 et G_2 sont indépendantes,

$$\varphi_Y(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta_1G_1}\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ta_2G_2} = \mathrm{e}^{-t^2a_1^2/2}\,\mathrm{e}^{-t^2a_2^2/2} = \mathrm{e}^{-(a_1^2+a_2^2)t^2/2}\,.$$

On calcule de la même façon quand $G = \sum_{j=1}^{n} c_jG_j$ et $\sum_{j=1}^{n} c_j^2 = 1$,

$$\varphi_G(t) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tc_1G_1}\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tc_2G_2}\ldots\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tc_nG_n} = \mathrm{e}^{-(c_1^2+\cdots+c_n^2)t^2/2} = \mathrm{e}^{-t^2/2},$$

ce qui montre que la loi de G est égale à γ (la fonction caractéristique détermine la loi).

Si $Y = \sum_{j=1}^{n} a_jG_j$, soit $\sigma \geq 0$ tel que $\sigma^2 := \sum_{k=1}^{n} a_k^2$; dans le cas $\sigma > 0$ considérons

$$c_j = a_j/\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{1/2} = a_j/\sigma\,;$$

ces coefficients (c_j) vérifient $\sum_{j=1}^{n} c_j^2 = \big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\big)/\sigma^2 = 1$, donc $Y/\sigma = \sum_{j=1}^{n} c_jG_j$ est de loi γ. Ainsi,

$$P\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} a_jG_j\Big| > t\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\Big)^{1/2}\Big) = P\big(|Y| > t\sigma\big) = P\big(|Y/\sigma| > t\big) \leq \mathrm{e}^{-t^2/2}\,.$$

Le cas $\sigma = 0$ est évident : quand $\sigma = 0$, tous les coefficients a_j sont nuls, $Y = 0$ et

$$P(|Y| > t\sigma) = P(|Y| > 0) = 0 \leq \mathrm{e}^{-t^2/2}\,.$$

Deuxième partie

— *Pour tout entier $k \geq 0$, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in [0, 2\pi]$ on pose*

$$f_k(x, \omega) = \sum_{2^k\leqslant n<2^{k+1}} G_n(\omega)\,\frac{\sin(nx)}{n}, \qquad F_k(\omega) = \max\Big\{\Big|f_k\Big(\frac{2\pi j}{4^k}, \omega\Big)\Big| : 0 \leq j < 4^k\Big\}$$

$$\textit{et} \quad M_k(\omega) = \max\{|G_n(\omega)| : 2^k \leq n < 2^{k+1}\}.$$

On fixe un nombre réel $c > \sqrt{2\ln 2}$, de sorte que $2\,\mathrm{e}^{-c^2/2} < 1$.

a. Vérifier que $\sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} n^{-2} \le 2^{-k}$. *Montrer que pour tout* x *fixé,*

$$\mathrm{P}\big(\{\omega \in \Omega : |f_k(x,\omega)| > 2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}\}\big) \le \mathrm{e}^{-2c^2 k}\,.$$

Montrer que pour P*-presque tout* $\omega \in \Omega$*, l'inégalité* $\mathrm{F}_k(\omega) \le 2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}$ *est vraie pour* k *assez grand (assez grand dépendant de* ω*, c'est-à-dire qu'il existe un entier* $k_0(\omega)$ *tel que l'inégalité soit vraie pour tout* $k \ge k_0(\omega)$*).*

Solution. — On note qu'il y a 2^k termes dans la somme

$$\sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} n^{-2},$$

et chaque n^{-2} dans cette somme est $\le (2^k)^{-2} = 4^{-k}$. La somme est donc $\le 2^k 4^{-k} = 2^{-k}$.

Pour x fixé, l'expression $f_k(x,\omega)$ est une combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes, et les coefficients $a_n = \sin(nx)/n$ de la combinaison linéaire vérifient

$$\sigma_{x,k}^2 := \sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \Big(\frac{\sin(nx)}{n}\Big)^2 \le \sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} n^{-2} \le 2^{-k}$$

(on choisit la racine $\sigma_{x,k}$ positive ou nulle, $0 \le \sigma_{x,k} \le 2^{-k/2}$). D'après la question *1.d*, on a pour tout $t > 0$ que

$$\mathrm{P}\big(|f_k(x,\omega)| > 2^{-k/2} t\big) \le \mathrm{P}\big(|f_k(x,\omega)| > \sigma_{x,k} t\big) \le \mathrm{e}^{-t^2/2},$$

et si on choisit $t = 2c\sqrt{k}$ on obtient le résultat voulu

$$\mathrm{P}\big(|f_k(x,\omega)| > 2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}\big) \le \mathrm{e}^{-2c^2 k}\,.$$

La variable aléatoire F_k est le sup des 4^k variables aléatoires $\omega \to f_k(x_j,\omega)$, où $x_j = 2\pi j 4^{-k}$ et $0 \le j < 4^k$; en utilisant simplement l'inégalité $\mathrm{e}^{-c^2/2} \le 1/2$, la question *1.c* et l'estimation précédente pour chaque $f_k(x,\omega)$ on obtient que

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_k > 2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}) \le \sum_{0 \leqslant j < 4^k} \mathrm{P}\big(|f_k(x_j,\omega)| > 2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}\big) \le 4^k\,\mathrm{e}^{-2c^2 k} \le 4^k 2^{-4k} = 2^{-2k},$$

qui est le terme général d'une série convergente. D'après la question *1.a*, on déduit que pour presque tout ω, il existe un entier $k_0(\omega)$ tel que l'événement $\mathrm{F}_k(\omega) > 2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}$ ne se produise plus pour $k \ge k_0(\omega)$: on a alors

$$\mathrm{F}_k(\omega) \le 2c\sqrt{k}\,2^{-k/2}$$

pour $k \ge k_0(\omega)$.

b. Vérifier que $\mathrm{P}(\mathrm{M}_k > t) \le 2^k\,\mathrm{P}(|\mathrm{G}_1| > t)$ *pour tout réel* $t \ge 0$. *Montrer que pour* P*-presque tout* $\omega \in \Omega$*, l'inégalité* $\mathrm{M}_k(\omega) \le c\sqrt{k}$ *est vraie pour* k *assez grand.*

Solution. — D'après la question *1.c*, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}_k > t) \le \sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} \mathrm{P}(|\mathrm{G}_n| > t),$$

et comme toutes les variables aléatoires G_n ont la même loi que la variable aléatoire G_1 on obtient l'inégalité $\mathrm{P}(\mathrm{M}_k > t) \le 2^k\,\mathrm{P}(|\mathrm{G}_1| > t)$. Dans le cas où $t = c\sqrt{k}$, on déduit de *1.b* que

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}_k > c\sqrt{k}) \le 2^k\,\mathrm{e}^{-c^2 k/2} = \big(2\,\mathrm{e}^{-c^2/2}\big)^k = a^k,$$

avec $a = 2\,\mathrm{e}^{-c^2/2} < 1$. La série à termes positifs $\sum \mathrm{P}(\mathrm{M}_k > c\sqrt{k}) \le \sum a^k$ est donc convergente. Le résultat découle de la question *1.a* (Borel-Cantelli).

c. Vérifier que $\big|f_k(x,\omega) - f_k(y,\omega)\big| \le 2^k \mathrm{M}_k(\omega)|x-y|$ *(utiliser* $|\sin u - \sin v| \le |u-v|$*). Montrer que pour* P*-presque tout* $\omega \in \Omega$*, il existe un entier* $k_0(\omega)$ *tel que pour tout* $k \ge k_0(\omega)$*, on ait que*

$$\forall x, y \in [0, 2\pi], \quad \big|f_k(x,\omega) - f_k(y,\omega)\big| \le c\sqrt{k}\, 2^k |x-y|.$$

Solution. — En utilisant l'indication sur les sinus, on obtient que

$$\big|f_k(x,\omega) - f_k(y,\omega)\big| \le \sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} |\mathrm{G}_n(\omega)| \Big|\frac{\sin(nx)}{n} - \frac{\sin(ny)}{n}\Big| \le$$

$$\le \Big(\sum_{2^k \leqslant n < 2^{k+1}} |\mathrm{G}_n(\omega)|\Big) |x-y| \le 2^k \mathrm{M}_k(\omega)|x-y|.$$

Pour presque tout ω on aura $\mathrm{M}_k(\omega) \le c\sqrt{k}$ pour k assez grand, donc

$$\big|f_k(x,\omega) - f_k(y,\omega)\big| \le 2^k \mathrm{M}_k(\omega)|x-y| \le 2^k c\sqrt{k}|x-y|.$$

d. Montrer que pour P*-presque tout* $\omega \in \Omega$*, l'inégalité*

$$\max\big\{|f_k(x,\omega)| : x \in [0,2\pi]\big\} \le \mathrm{F}_k(\omega) + 2\pi 4^{-k} c\sqrt{k} 2^k$$

est vraie pour k assez grand. En déduire que pour P*-presque tout ω fixé, la série de fonctions de terme général* $x \to f_k(x,\omega)$ *a pour somme* $x \to \sum_{k\geqslant 0} f_k(x,\omega)$ *une fonction continue sur* $[0, 2\pi]$.

Solution. — Commençons par rassembler en une seule les informations presque sûres obtenues dans les questions précédentes : il existe un ensemble $\mathrm{N} \in \mathcal{F}$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{N}) = 0$ et tel que pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$, il existe un entier $k_0(\omega)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

– pour tout $k \ge k_0(\omega)$ on a, pour tous y_1, y_2 dans $[0, 2\pi]$, la majoration

$$\big|f_k(y_1,\omega) - f_k(y_2,\omega)\big| \le c\sqrt{k}\, 2^k |y_1 - y_2|.$$

– pour tout $k \ge k_0(\omega)$ on a $\mathrm{F}_k(\omega) \le 2c\sqrt{k} 2^{-k/2}$.

Fixons $\omega \notin \mathrm{N}$ et $k \ge k_0(\omega)$. Si x est donné, quelconque dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, il existe un point $x_j = 2\pi j\, 4^{-k}$ tel que $x_j \le x < x_j + 2\pi 4^{-k}$ donc

$$|f_k(x,\omega)| \le |f_k(x_j,\omega)| + |f_k(x_j,\omega) - f_k(x,\omega)| \le \mathrm{F}_k(\omega) + |f_k(x_j,\omega) - f_k(x,\omega)| \le$$

$$\le 2c\sqrt{k} 2^{-k/2} + c\sqrt{k}\, 2^k |x - x_j| \le 2c\sqrt{k} 2^{-k/2} + c\sqrt{k}\, 2^k 2\pi 4^{-k}.$$

Comme x est quelconque dans $[0, 2\pi]$, on déduit que

$$v_k(\omega) := \max\{|f_k(x,\omega)| : 0 \le x \le 2\pi\} \le 2c\sqrt{k} 2^{-k/2} + c\sqrt{k}\, 2\pi 2^{-k} \le 10c\sqrt{k} 2^{-k/2},$$

et le dernier majorant est le terme général d'une série numérique convergente. Par conséquent, la série $\sum v_k(\omega)$ converge pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$: pour un tel ω, la série des fonctions continues $x \to f_k(x,\omega)$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$, donc sa somme est continue.