Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 1

Exercice I:

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=-n}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$.

(*Rappel:* <u>*sommes de Riemann*</u> *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction monotone ou continue ou, plus généralement, Riemann-intégrable. La suite de terme général*

$$\frac{1}{n}\left(f(a+\frac{b-a}{n})+f(a+2\frac{b-a}{n})+\cdots+f(a+k\frac{b-a}{n})+\cdots+f(b)\right)$$

a pour limite $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.)

Exercice II:

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (c-à-d définie par 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon) n'est pas Riemann intégrable.

Exercice III:

1) L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est-il dénombrable ?

(*Rappel: Il n'existe pas d'application surjective d'un ensemble* E *dans l'ensemble de ses parties* $\mathcal{P}(E)$ *car pour une telle application* f *la partie* $B = \{x \in E; x \notin f(x)\}$ *n'a pas d'antécédent.*)

2) Soit p un entier naturel non nul.

a) L'ensemble des suites à valeurs entières définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients entiers fixée est-il dénombrable ?

(*Rappel: Une telle relation correspond à définir* $u_{n+p} = a_p u_{n+p-1} + \cdots + a_2 u_{n+1} + a_1 u_n + a_0$, *pour des coefficients entiers* a_i)

b) L'ensemble des suites à valeurs entières pouvant être définies par une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers est-il dénombrable ?

Exercice IV: *Limites sup et inf d'une suite de réels*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On considère les éléments suivants de $\overline{\mathbb{R}}$ appelés limite inf et limite sup de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\underline{\lim}\, u_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} (\inf_{n>p} u_n), \quad \overline{\lim}\, u_n = \inf_{p\in\mathbb{N}} (\sup_{n>p} u_n)$$

1) Quelles inégalités peut-on écrire avec les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ suivants: $\overline{\lim}\, u_n, \underline{\lim}\, u_n$, $\inf u_n, \sup u_n$.

2) Que valent $\overline{\lim}\, u_n, \underline{\lim}\, u_n, \inf u_n, \sup u_n$ dans les cas suivants:

i) a^n (où $a \in \mathbb{R}^*$), ii) $(-1)^n(1+\frac{1}{n+1})$, iii) $(-1)^n(1-\frac{1}{n+1})$.

3) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$, comparer les limites inf et sup de (u_n) et (v_n).

4) a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers l où $l \in \overline{\mathbb{R}}$, montrer que $l = \overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n$.

(*Indication: Montrer que* $\overline{\lim}\, u_n$ *et* $\underline{\lim}\, u_n$ *sont des valeurs limites de la suite* (u_n)*, c-à-d des limites de sous-suites extraites de* (u_n)*, ou encore des valeurs d'adhérence de* (u_n)*.*

Rappel: Une valeur d'adhérence de (u_n) *peut être finie ou infinie. Dans le premier cas le nombre* a *est valeur d'adhérence si* $\forall \epsilon > 0$ *et* $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n > n_0$ $|a - u_n| < \epsilon$*; dans le second cas* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) est valeur d'adhérence si* $\forall M$ $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n > n_0$ $u_n > M$ *(resp.* $u_n < M$*). Dans les deux cas* a *est valeur d'adhérence ssi on peut extraire de la suite* (u_n) *une sous-suite* (u_{n_k}) *qui converge vers* a*.*

Remarque : en général, un terme de la suite n'est pas une valeur d'adnhérence bien qu'il soit, évidemment, adhérent à l'ensemble des termes de la suite.

b) Décrire $\overline{\lim}\, u_n$ et $\underline{\lim}\, u_n$ en fonction des valeurs d'adhérence de (u_n).

5) Montrer que s'il existe un élément l de $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $l = \overline{\lim}\, u_n = \underline{\lim}\, u_n$, alors (u_n) est une suite convergente vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exercice V: *Limites sup et inf d'une suite de parties*

Dans cet exercice on considère un ensemble Ω, et (A_n) une suite de parties de Ω. On appelle limite inf et limite sup de la suite (A_n) les parties:

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>p} A_n, \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>p} A_n$$

1) Soit (u_n) est une suite quelconque de réels

a) Montrer que $]-\infty, \overline{\lim}\, u_n[\subset \overline{\lim}]-\infty, u_n[\subset \overline{\lim}]-\infty, u_n] \subset]-\infty, \overline{\lim}\, u_n]$.

b) Donner des exemples montrant que ces inclusions peuvent être strictes.

c) Soit (u_n) une suite de fonctions réelles. Montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, on a $\overline{\lim}\{u_n \geq a\} \subset \{\underline{\lim}\, u_n \geq a\} \subset \overline{\lim}\{u_n \geq a - \epsilon\}$.

2) Soient (A_n) et (B_n) deux suites de parties de l'ensemble Ω.

a) Montrer $\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n$ et $(\underline{\lim}\, A_n)^c = \overline{\lim}(A_n^c)$.

b) Montrer que $\overline{\lim}(A_n \cup B_n) = (\overline{\lim}\, A_n) \cup (\overline{\lim}\, B_n)$.

c) Montrer que $\overline{\lim}\, A_n \cap \underline{\lim}\, B_n \subset \overline{\lim}(A_n \cap B_n) \subset (\overline{\lim}\, A_n) \cap (\overline{\lim}\, B_n)$.

d) Montrer que $\overline{\lim}\, A_n - \underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}(A_n \Delta A_{n+1})$.

(*Rappel: La différence symétrique* $A\Delta B$ *des ensembles* A *et* B *est définie par* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.)

e) Montrer que l'on a $\mathbf{1}_{\overline{\lim}\, A_n} = \overline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n}$ et $\mathbf{1}_{\underline{\lim}\, A_n} = \underline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n}$.

f) Montrer que $\overline{\lim}\, A_n$ (resp. $\underline{\lim}\, A_n$) est l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n (resp. à tous les A_n sauf un nombre fini).

Exercice VI:

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2, n = 2^{p_n} + q_n, 0 \leq q_n < 2^{p_n}$.

2) On note $I_n = [\frac{q_n}{2^{p_n}}, \frac{1+q_n}{2^{p_n}}]$. Déterminer $\overline{\lim}\, I_n$ et $\underline{\lim}\, I_n$.