Intégration et Probabilités 10, supplément

Exercice I

Montrer que si X est une variable aléatoire de fontion de répartition F continue, alors la variable $F(X)$ est de loi uniforme sur $[0,1]$.
On se limite au cas où la loi de X est portée par $\mathbb{R}_+$ mais on ne suppose plus F continue et l'on note $G(x)$ =inf $\{y \geq 0 \mid F(y) - F(0) > x\}$.Montrer que, pour tout $a > 0$, on a
$\{x \mid G(x^-) \leq a\} =]0, P(0 < X \leq a)]$. En déduire, pour tout $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$\int f dF = f(0)P(\{X = 0\}) + \int_0^c f(G(x^-))dx, \text{ où } c = P(\{0 < X < \infty\}).$$

On suppose que F a une seule discontinuité : en utilisant ce qui précède, expliciter la fonction de répartititon de $F(X)$.

Exercice II

Soit X une variable aléatoire de fontion caractéristique Φ admettant une dérivée seconde en 0. On veut montrer que $X \in L^2$.

1) Montrer que $\lim_{t \to 0} 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos tx - 1}{t^2} dP_X(x) = \Phi''(0)$.

2) En déduire, à l'aide du lemme de Fatou, que $E(X^2) \leq -\Phi''(0)$.

<u>Remarque</u> : il est faux que $\Phi'(0)$ existe $\Rightarrow \Phi$ est intégrable. Si, par exemple, $P(x = n) = \frac{\epsilon_{|n|}}{n^2}$, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, où $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ est une suite qui décroît vers 0 et vérifie $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n} = +\infty$,on a $E(X) = +\infty$ et on peut montrer que Φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, $\phi_X(t) = \sum_1^\infty \frac{\epsilon_n \cos nt}{n^2}$ a une série dérivée uniformément convergente sur $\mathbb{R}$: la preuve repose sur le lemme d'Abel et le fait que les sommes $\sum_1^N \frac{\sin nt}{n}$ sont majorées indépendamment de N et de t.

Exercice III

On va montrer une <u>formule d'inversion de Fourier</u>
Si μ est une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}$ de transformée de Fourier $\Phi(t) = \int e^{ixt} d\mu(x)$ *intégrable*, alors μ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ixu} \Phi(u) du$.

Remarque : la démonstration prouve aussi que si f est intégrable, de transformée de Fourier Φ intégrable, alors $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ixu} \Phi(u) du$.

1) Montrer que, pour tout $\sigma > 0$ et $u \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iut - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt$.

2) En déduire que, pour tous $y \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on a : $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} d\mu(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \phi(t) dt$.

3) En déduire que, pour toute fonction g Lebesgue-intégrable continue sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{\sigma \to 0^+} (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{\mathbb{R}} g(y) \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} d\mu(x) \Big) dy = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} g(y) \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-iyt} \Phi(t) dt \Big) dy.$$

4) Montrer par ailleurs que cette limite est $\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x)$ et conclure.

Exercice IV

Soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 2\pi[$. on définit $X = \sin Z, Y \cos Z$.

1) Calculer les moyennes et les variances de X et Y;

2) Calculer $Cov(X, Y)$. Les v.a. X, Y sont-elles indépendantes?

3) Déterminer les lois de X, Y.

Exercice V

On place dans un sac 26 jetons de scrabble sur lesquels figurent les lettres de l'alphabet. On compose un texte de la manière suivante : on tire un jeton au hasard, on écrit la lettre qui y figure puis on remet le jeton dans le sac et on recommence. Montrer qu'avec probabilité 1 le mot "poésie" apparait une infinité de fois dans le texte obtenu.

Exercice VI

Un joueur J joue à pile ou face contre le casino. On suppose que les lancers sont indépendants et que chacun donne "pile" avec probabilité p $(0 \leq p \leq 1)$. Le joueur gagne 1 euro chaque fois que "pile" apparaît et en perd un chaque fois que "face" apparaît.
On note X_n la fortune du joueur au temps n en supposant $X_0 = 0$. C'est une v.a. sur un espace de probabilité Ω.

1) Pour $n \geq 0$, déterminer la loi de X_n.

2) Montrer que, si $p \neq \frac{1}{2}$, $P(\overline{\lim}\,\{X_n = 0\}) = 0$.[Rappel : au voisinage de l'infini, $n!$ est équivalent à $n^n \mathrm{e}^{-n}(2\pi n)^{\frac{1}{2}}$.]
Retrouver ce résultat à l'aide de la loi des grands nombres.

3) On cherche à montrer que si $p = \frac{1}{2}$, on a $P(\overline{\lim}\,\{X_n = 0\}) = 1$.
Pour cela, on introduit les événements suivants : $A = \Omega \setminus \overline{\lim}\,\{X_n = 0\}$,
$A_0 = \cap_{n\geq 1}\{X_n = 0\}$, $A_k = \{X_k = 0\} \cap_{n \geq k+1} \{X_n \neq 0\}$, pour $k \geq 1$.

a) Montrer que $P(A) = \sum_0^\infty P(A_k)$.

b) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, $P(A_k) = P(\{X_k = 0\})P(A_0)$.

c) En déduire que $P(A) = P(A_0)[1 + \sum_1^\infty P(\{X_k = 0\})]$

d) En déduire que, si $p = \frac{1}{2}$, $P(A) = P(A_0) = 0$. Conclure.

Le résultat de cette question signifie que la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ repasse indéfiniment en 0, presque sûrement. On dit qu'elle est récurrente.