Intégration et Probabilités 10

Exercice I Loi Gamma, Beta, χ^2

Pour tout $a > 0$ et tout $\lambda > 0$ on pose $\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} 1_{\mathbb{R}^+}$. La loi de densité $\gamma_{a,\lambda}$ est notée $\Gamma(a, \lambda)$.

1) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$. Calculer la loi du couple $(X + Y, X/(X + Y))$ puis les lois de $X + Y$ et $X/(X + Y)$. En déduire que $X + Y$ et $X/(X + Y)$ sont indépendantes, que

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

et que $X + Y$ suit une loi $\Gamma(a + b, \lambda)$.

2) Trouver la loi de X/Y et montrer que cette variable aléatoire est indépendante de $X + Y$.

3) Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Gauss centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$. Montrer que $X_i^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $Z \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. Calculer son espérance et sa variance. Cette loi s'appelle loi du χ_n^2.

Exercice II

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même densité $f(x) = \frac{1}{x^2} 1_{[1,\infty[}(x)$. On pose $U = XY$ et $V = X/Y$. Calculer la loi du couple (U, V) puis les lois marginales de U et V. Les va U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice III

1) Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une variable aléatoire indépendante de X de loi donnée par $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $Z = XY$.

2) Quelle est la loi de Z ? Calculer $\mathrm{Cov}(X, Z)$ et $\mathrm{Cov}(X^2, Z^2)$. X et Z sont-elles indépendantes ?

3) On pose $U = X + Z$. Déterminer la loi de U et donner sa fonction de répartition. Si X et Z étaient indépendantes quelle serait la loi de U ?

Exercice IV

Soit $X : (\Omega, A, P) \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles.

1) Montrer que $E(X) = \int_0^\infty P(X \geq t)dt$.

2) Montrer que plus généralement si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est croissante et dérivable et vérifie $f(0) = 0$ alors $E(f(X)) = \int_0^\infty f'(t)P(X \geq t)dt$.

3) En déduire en particulier que $E(X^n) = \int_0^\infty nt^{n-1}P(X \geq t)dt$ et donc que l'on peut calculer tous les moments de X lorsqu'on connaît sa fonction de répartition.

Exercice V

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que

$$P(X = Y) = \int_{\mathbb{R}} P(Y = x)dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} P(X = y)dP_Y(y).$$

En déduire que si l'une des variables X ou Y a une densité alors $P(X \neq Y) = 1$.

Exercice VI Théorème de Stone-Weierstrass

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $P(X_n = 1) = x = 1 - P(X_n = 0)$ où $x \in [0, 1]$. Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et $M = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1) Calculer $E(f(\frac{S_n}{n}) - f(x))$ en fonction de x.

2) Montrer que $\forall\epsilon,\quad \exists\eta$ tel que

$$\left|E(f(\frac{S_n}{n}) - f(x))\right| \leq 2MP(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \eta) + \epsilon$$

3) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebichev montrer que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n})x^k(1 - x)^{n-k}$$

converge uniformément vers f.

Exercice VII

1) On considère la suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies par

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n},\quad P(X_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité, dans les espaces L^p et en loi. Montrer en utilisant l'exercice 7 de la feuille 9 qu'il n'y a pas convergence p.s. de X_n vers 0. Que peut-on dire si

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}?$$

2) On considère la suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies par

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n},\quad P(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité et en loi mais pas p.s. ni dans les espaces L^p.

Exercice VIII

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f et g par rapport à la mesure de Lebesgue. On pose $m = \min(X, Y)$ et $M = \max(X, Y)$.

1) Montrer que la loi du couple (m, M) est

$$\mu = 1_{x<y}[f(x)g(y) + f(y)g(x)]dxdy.$$

2) Calculer $E(m)$ et $E(M)$ lorsque X est une loi exponentielle de paramètre 1 et Y une loi uniforme sur $[0, 1]$.