Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 1 Supplément

Exercice 1. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, étudier la convergence des intégrales de Riemann impropres

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 x^\alpha |\ln x|^\beta dx, \quad J_{\alpha,\beta} = \int_2^\infty x^\alpha |\ln x|^\beta dx \quad L_{\alpha,\beta} = \int_1^\infty x^\alpha \sin x \exp(-\beta x) dx$$

On cherchera aussi, dans le cas convergent, un équivalent simple du reste $\int_A^\infty x^\alpha |\ln x|^\beta dx$ et, dans le cas divergent, un équivalent de $\int_2^A x^\alpha |\ln x|^\beta dx$, quand A tend vers l'infini.

Exercice 2. Montrer qu'une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a, en tout point, une limite à gauche et une limite à droite. Montrer que l'ensemble de ses discontinuités est au plus dénombrable.

Exercice 3. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble dénombrable. Montrer que, pour tous points $M, N \notin A$, il existe un segment brisé joignant M et N dans $\mathbb{R}^2 \setminus A$.

Exercice 4. Soient $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites de 0 et de 1 et $\varphi : [0,1[\to \mathcal{S}, \varphi(x) = s$ définie par : $s_1 = 0$ si $x \in [0, 1/2[$, $\ s_1 = 1$ sinon puis, $s_1, \ldots s_p$ étant définis, on pose $a_p = \sum_1^p s_k 2^{-k}$ et on définit $s_{p+1} = 0$ si $x - a_p < 2^{-p-1}$, $\ s_{p+1} = 1$, sinon.

1. Montrer que $\varphi(x) = (s_k) \Rightarrow x = \sum_k s_k 2^{-k}$.
2. Montrer que s_k est nul à partir d'un certain rang ssi il existe $M, p \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{M}{2^p}$.
3. Montrer que si s appartient à l'image de φ, s n'est pas stationnaire en 1.
4. Montrer que, si s n'est pas stationnaire en 1, alors on a $s = \varphi(x)$ où $x = \sum s_k 2^{-k}$.

En résumé, φ est une bijection de $[0,1[$ sur l'ensemble des suites de 0 et de 1 qui ne sont pas stationnaires en 1.

Exercice 5.

1. Montrer que l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ dont les extrémités sont des rationnels est dénombrable.
2. Cardinal de l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$?
3. Cardinal de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 6. Soit (a_n) une suite réelle telle que $\underline{\lim} a_n = 0$, $\overline{\lim} a_n = 1$ et $\lim |a_{n+1} - a_n| = 0$. Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence de (a_n). Donner un exemple d'une telle suite.

Exercice 7. Soit (r_n) une énumération de rationnels de $[0,1]$. Soit $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. Pour un tel ϵ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note successivement $U_n(\epsilon) =]r_n - \epsilon 2^{-n}, r_n + \epsilon 2^{-n}[$, $F(\epsilon) = \cup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ et $F = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} F(1/n)$.

1. Calculer $\cap_{x \in F}(F \setminus \{x\})$. Le *théorème de Baire (dans un espace mtŕique complet, l'intersection d'unensemble dénombrable d'ouverts denses est dense* permet alors de montrer que F n'est pas dénombrable et, en particulier, que F contient des réels non rationnels.

2. On choisit $\epsilon > 0$ et pour tout $M \geq 1$, on pose $V_M = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{M} U_n$ et on note f_M l'indicatrice de V_M.

   (a) Montrer que la suite (f_M) converge simplement vers une limite qu'on note f_∞. Montrer que les fonctions f_M sont Riemann-intégrables.

   (b) Montrer que $f_\infty^{-1}(\{1\})$ est ouvert dense dans $[0,1]$.

   (c) Montrer que, si f_∞ était Riemann-intégrable, on aurait $\int_0^1 f_\infty(x)dx = 1$.

   (d) Montrer que, pour tout M, on a $\int_0^1 f_M(x)dx \leq 2\epsilon$.

   (e) Un résultat du cours à venir permet alors d'obtenir une contradiction (on montre que $\int_0^1 f_\infty(x)dx \leq 2\epsilon$) et donc de conclure que f_∞ n'est pas Riemann-intégrable. On montre, d'autre part, que l'intégrale de Lebesgue de $\mathbf{1}_F$ est égale à 0.

Exercice 8.

1. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles $f(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, pour $t \in]-1, 1[$ ainsi que $I_n(t) = \int_0^t u^n \ln u du$.

2. On pose $g(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, pour $t \in]-1,1[$. Exprimer à l'aide de g et des fonctions usuelles, l'intégrale $J(t) = \int_0^t \frac{\ln u}{1-u^2} du \quad (t \in]-1,1[)$. En déduire $J(1)$ comme somme d'une série. Montrer que $g(1) = \int_0^\infty \frac{t}{2\mathrm{sh} t} dt$.

Exercice 9.

1. Montrer que ; $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{np+1}$ $(p > 0)$. (On pourra considérer, pour $a < 1$, l'intégrale de 0 à a et développer l'intégrande en série puis majorer l'intégrale de a à 1.)

2. Trouver C tel que $\displaystyle\sum_N^\infty \frac{(-1)^n}{np+1} \sim_{N\to\infty} (-1)^n \frac{C}{N}$.