Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 2 Supplément

Exercice 1. Soient $f, g; [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions Riemann-intégrables. On suppose que f est positive et décroissante. On veut montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que l'on ait :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a^+) \int_a^c g(x)dx.$$

1. Montrer que si m, M désignent les bornes inférieure et supérieure de la fonction $t \mapsto \int_a^t g(x)dx$, le résultat cherché équivaut à $mf(a^+) \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le Mf(a^+)$.
2. On suppose que f est en escaliers. Montrer le résultat dans ce cas.
3. Dans le cas général, on introduit des fonctions en escaliers f_n, h_n en posant, sur chaque intervalle $[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}[$, $f_n(x) = f(a + k\frac{b-a}{n}), h_n(x) = f(a + (k-1)\frac{b-a}{n})$ et $f_n(b) = h_n(b) = f(b)$.
   (a) Montrer que $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))$.
   (b) Soit C un majorant de $|g|$ sur $[a, b]$.Montrer que
   $$\left| \int_a^b f_n(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \le C\frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))$$
   (c) En appliquant ce qui précède et la question 2., conclure.

Exercice 2. Soient $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ des fonctions mesurables. On note $A = \{x \in \Omega |\ (f_n(x)) \text{ converge}\}$. Montrer que $A \in \mathcal{A}$. Même résultat pour des fonctions à valeurs dans $(\mathbb{Q}, \mathcal{B}(\mathbb{Q}))$.

Exercice 3. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction . On note $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par f. Montrer que la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable si et seulement s'il existe une fonction borélienne h telle que $g = h \circ f$. (Commencer par g étagée et utiliser l'exercice **2**).

Exercice 4. Déterminer les tribus engendrées par les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :
a) $f(x) = x^2$; b) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; c) la fonction partie entière ;
d) $h(x) = 0$ si $x \in [0, 1], h(x) = x$ si $x < 0, h(x) = x - 1$ si $x > 1$.

Exercice 5. Soit ϕ une fonction continue à support compact.

1. Montrer que l'on a : $\lim_{k\to\infty} \int \phi(t)|\sin kt|dt = \frac{2}{\pi} \int \phi(t)dt$. Utiliser le fait que ϕ est limite uniforme de fonctions en escaliers.

2. Montrer que si F est une fonction continue périodique de période T, on a de même :
$$\lim_{k\to\infty} \int \phi(t)F(kt)dt = \frac{1}{T}\int_0^T F(u)du \int \phi(t)dt.$$

Ce résultat sera généralisé : c'est le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable (bornée) et g une fonction définie sur un segment contenant $f([a, b])$.

1. On suppose g lipschitzienne. Montrer que $g \circ f$ est Riemann-intégrable.
2. Montrer que toute fonction g continue sur un segment est limite uniforme de fonctions lipschitziennes (on pourra approcher g par des fonctions affines par morceaux). En déduire que si g est continue alors $g \circ f$ est Riemann-intégrable.

Exercice 7. On dit qu'une $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.

1. Montrer que l'ensemble des discontinuités d'une fonction réglée est au plus dénombrable. En déduire qu'une fonction réglée est Riemann-intégrable.
   La réciproque est fausse : on montrera que l'indicatrice de l' "ensemble de Cantor" est Riemann-intégrable et n'est pas règlée.
2. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle a en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

Exercice 8. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si son indicatrice est Riemann-intégrable et sa mesure est alors l'intégrale de son indicatrice.

1. Montrer que la mesure de A est le sup (resp. l'inf) des nombres $m(E) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ où E est la réunion disjointe des segments $[a_i, b_i], (1 \le i \le n)$ et $E \subset A$ (resp. $A \subset E$).
2. Montrer que si A est Riemann-intégrable bornée alors $\overline{A}$ est Riemann-intégrable et a même mesure que A.
3. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est-il Riemann-intégrable?

Exercice 9. Soient $[a, b]$ un segment et Ω un ouvert de $[a, b]$. Montrer que l'indicatrice de Ω est limite croissante d'une suite de fonctions continues.(*Indication* : commencer par le cas où cette indicatrice est en escaliers puis ranger les composantes connexes de Ω en une suite.)

Exercice 10. Calculer $\int_0^{2\pi} \log(1 - 2x\cos\theta + x^2)d\theta$ pour $x \ge 0, x \ne 1$. On utilisera les sommes de Riemann après avoir remarqué que $1 - 2x\cos\theta + x^2 = |1 - xe^{i\theta}|^2$.

Exercice 11. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue

1. On pose $h(x) = \ln x \int_0^x f(t)dt$ si $x \in]0, 1], h(0) = 0$. Montrer que h est continue. Montrer que $\int_0^1 (\ln t)f(t)dt$ est absolument convergente.
2. On définit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = \ln x \int_0^x f(t)dt + \int_x^1 (\ln t)f(t)dt$ si $x \in]0, 1]$,
   $g(0) = \int_0^1 (\ln t)f(t)dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.