Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 2

Exercice I:

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \text{ irrationnel} \\ 1 & \text{si } \; x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fraction irréductible} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable. (*1) Essayer de construire pour $\varepsilon > 0$ une division D de [0,1] pour laquelle $S(D) < 2\varepsilon$ où $S(D)$ est la grande somme de Darboux associée à f et D; 2) trouver les discontinuités de f; 3) montrer que f est limite uniforme de fonctions en escalier.*)

Utiliser cette fonction et la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par composition. Utiliser la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par limite simple.

Exercice II:

Pour la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1 + n^2x^2)^2}$$

calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ? A-t'on

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad ?$$

Mêmes questions pour la suite $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $g_n(x) = \dfrac{n^2x}{(1 + n^2x^2)^2}$.

Exercice III:

1) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}$. L'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{C}$ est-elle une tribu?

2) Soit E un ensemble. Caractériser l'algèbre de Boole et ensuite la tribu engendrée par les singletons $\{x\}, x \in E$.

Exercice IV:

Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur un ensemble E. Montrer que la tribu engendrée par

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{A | A \in \mathcal{A}_1 \text{ ou } \; A \in \mathcal{A}_2\}$$

coïncide avec la tribu engendrée par $\{A_1 \cap A_2 | A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ ou encore par $\{A_1 \cup A_2 | A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$.

Exercice V:

Les parties suivantes de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sont-elles des algèbres de Boole? des tribus?

- L'ensemble des parties symétriques (c'est-à-dire telles que $x \in A \Rightarrow -x \in A$).
- L'ensemble des parties finies ou de complémentaire fini.
- L'ensemble des parties dénombrables ou de complémentaire dénombrable.

Exercice VI:

Soient $\mathcal{B}$ une tribu sur un ensemble E et F une partie de E. On note $\mathcal{B}(F)$ la tribu trace de $\mathcal{B}$ sur F.

1) a) Comparer $\mathcal{B}(F)$ et $\mathcal{B}_F = \{B \in \mathcal{B}, B \subset F\}$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}_F$.

2) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties engendrant la tribu $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{C}(F) = \{C \cap F | C \in \mathcal{C}\}$. Montrer que $\mathcal{C}(F)$ engendre $\mathcal{B}(F)$. (*Voir ceci comme un cas particulier du Lemme de transport.*)

Exercice VII:

Montrer que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boreliens de $\mathbb{R}$ peut être engendrée par l'une des classes suivantes:

- $\mathcal{C}_1 = \{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{] - \infty, a], a \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{] - \infty, a[, a \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_4 = \{]a, +\infty[, a \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_5 = \{[a, +\infty[, a \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_6 = \{] - \infty, a], a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

Exercice VIII:

1) Soit Ω un ensemble, I une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$, et $\mathcal{B} = \{B_n | n \in I\}$ une partition de Ω. On suppose de plus que I est tel que $\forall n, n' \in I, B_n = B_{n'} \Rightarrow n = n'$

a) Montrer que la tribu engendrée par $\mathcal{B}$ est $\mathcal{C} = \{\cup_{n \in J} B_n | J \subset I\}$.

b) En déduire le cardinal de $\mathcal{C}$ en fonction de celui de I.

2) Soit $\mathcal{A}$ une tribu dénombrable sur Ω. On considère pour tout ω de Ω la famille $\mathcal{A}_\omega = \{A \in \mathcal{A} | \omega \in A\}$, et $B_\omega = \cap_{A \in \mathcal{A}_\omega} A$.

a) Montrer que B_ω est le plus petit ensemble $\mathcal{A}$-mesurable contenant ω. On dit que B_ω est l'atome de ω

b) Montrer que $\mathcal{B} = \{B_\omega | \omega \in \Omega\}$ est une partition dénombrable de Ω.

c) Montrer que la tribu engendrée par $\mathcal{B}$ est $\mathcal{A}$.

3) En déduire qu'il n'existe pas de tribu infinie et dénombrable.

Application: Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Décrire la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{A\}$, $\mathcal{C} = \{A, B\}$, $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$.

Exercice IX:

Soient f et g deux applications mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ sont $\mathcal{A}$-mesurables. Même question si f et g sont à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Exercice X:

Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, et f une application borélienne.

1) Décrire $f^{-1}(\mathcal{B})$ dans le cas $f = 1_A$ où $A \in \mathcal{B}$.

2) a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des boréliens de $\mathbb{R}$ symétriques par rapport à 0 est une tribu.

b) On suppose que f est paire. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{S}$.

c) Montrer que cette inclusion peut être stricte. (On pourra considérer la fonction cosinus)

d) Montrer que si la fonction f est définie par $f(x) = |x|$, alors $f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{S}$.

e) En déduire que $\mathcal{S}$ est engendrée par les intervalles $[-b, b]_{b \in \mathbb{R}^+}$.