Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 3 Supplément

Exercice 1. Soient E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ tels que $E \in \mathcal{A}$ et que, tout élément $A \in \mathcal{A}$ soit le complémentaire d'une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$.
Montrer qu'il existe une plus petite classe $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(E)$ contenant $\mathcal{A}$ et stable par union et intersection dénombrables. Montrer que $\mathcal{D}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. (*Indication : on pourra considérer* $\mathcal{C} =_{\text{def}} \{C \subset E | C, C^c \in \mathcal{D}\}$.*)*

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite. En considérant les fonctions $x \mapsto f_p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(\frac{k+1}{2^p}) \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}[}(x)$, montrer que f est borélienne.

Exercice 3. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction additive telle que $m(\emptyset) = 0$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

   (a) Pour toute suite (A_n) déléments disjoints de $\mathcal{A}$, on a $m(\cup A_n) = \sum m(A_n)$.

   (b) Pour toute suite croissante (A_n) déléments de $\mathcal{A}$, on a $m(\cup A_n) = \lim m(A_n)$.

2. Dans le cas d'une fonction m bornée, cela équivaut à :

   (c) Pour toute suite décroissante (A_n) déléments de $\mathcal{A}$, on a $m(\cap A_n) = \lim m(A_n)$.

3. Soit $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $m(A) = \sum_{k \in A} 2^{-k}$ si A est fini non vide,$m(\emptyset) = 0$, $m(A) = \infty$ si A est infini. Montrer que m est additive et qu'elle a la propriété (c) pour les suites telles que A_0 soit fini. Montrer cependant que m n'est pas une mesure.

4. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En considérant $A_n = [n, \infty[, (n \in \mathbb{N})$, montrer que (c) n'est pas vraie pour λ.

Exercice 4. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini tel que $\mathcal{A}$ contienne les singletons.

1. Montrer que l'ensemble des $x \in E$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$ est au plus dénombrable.

2. Montrer que μ s'écrit de manière unique $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 est une somme dénombrable de masses ponctuelles et μ_2 une mesure diffuse i.e. telle que $\mu_2(\{x\}) = 0$, pour tout $x \in E$.

Exercice 5. Soit $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que les fonctions f_t soient boréliennes et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f_t(x)$ soit continue à droite. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\{x \in \mathbb{R} | \sup_{t\in\mathbb{R}} f_t(x) > a\} = \bigcup_{t\in\mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R} | f_t(x) > a\}$ et en déduire que la fonction $\sup_{t\in\mathbb{R}} f_t$ est borélienne.

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré où m est bornée. Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole engendrant $\mathcal{A}$.

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $m(A \Delta B) \leq \epsilon$.
2. On suppose que $\mathcal{A}$ contient les singletons et que $\mathcal{B}$ est dénombrable. Soit $A(x) =_{\text{def}} \cap\{A \in \mathcal{A} | x \in A\}$. Déduire de 1. que $A(x) = \cap\{A \in \mathcal{B} | x \in A\}$ puis que $A(x) \in \mathcal{A}$.

Exercice 7. Soit (a_n) une suite décroissante convergeant vers $\alpha \geq 0$, telle que $a_0 \in]0, 1[$.
On définit une suite de fermés $C_n \subset [0, 1]$ comme suit :
C_0 est obtenu en enlevant au milieu de $[0, 1]$ un intervalle ouvert de longueur $1 - a_0$
C_n est obtenu en enlevant au milieu de chaque segment composant C_{n-1} un intervalle ouvert de longueur $2^{-n}(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que $C =_{\text{def}} \cap C_n$ est mesurable. Quelle est sa mesure?
2. Montrer que C est compact, totalement discontinu (i.e. les composantes connexes de C sont des points) et sans point isolé. On dit que C est *parfait*
3. On pose $a_n = (2/3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $C = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k 3^{-k} | a_k \in \{0, 2\}\}$.

   C'est l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice 8. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est invariante par homothétie c'est-à-dire que l'on a, pour tout A borélien : $\lambda(\alpha A) = \alpha\lambda(A)$ (α est un réel positif et l'on a posé $\alpha A = \{\alpha x | \ x \in A\}$.)

Exercice 9. Montrer qu'une mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^d$ (c-a-d une mesure borélienne finie sur les compacts) est de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} k_n \delta_{x_n}$ avec $k_n \in \mathbb{N}$ et δ_{x_n} mesure de Dirac au point x_n si et seulement si l'on a $\mu(I) \in \overline{\mathbb{N}}$, pour tout pavé ouvert I à sommets rationnels.
(*Indication* : On pourra montrer que si $\mu(I)$ est entier pour tout I, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un voisinage V_x de x tel que $\mu(\{x\}) = \mu(V_x)$.)