Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 3

Exercice I:

Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) | \forall n > 0, (2n \in A \iff 2n+1 \in A)\}$.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$.

2) On considère l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $f(z) = z + 2$.

a) Montrer que f est $\mathcal{A}$-mesurable et bijective.

b) f^{-1} est elle $\mathcal{A}$-mesurable?

Exercice II:

Soient N une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1) Montrer que $g : \omega \mapsto f_{N(\omega)}(\omega)$ est $\mathcal{A}$ mesurable.

2) Montrer que $h : \omega \mapsto \sum_{n=0}^{N(\omega)} f_n(\omega)$ est $\mathcal{A}$ mesurable.

Exercice III:

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et (Y, d) un espace métrique muni de sa tribu borélienne. Soit (f_n) une suite d'applications mesurables de X dans Y qui converge simplement vers une application f.

1) Soit O un ouvert de Y différent de Y. Pour $p \geq 1$, soit $O_p = \{y \in Y | d(y, Y \setminus O) > \frac{1}{p}\}$. Montrer que O_p est un ouvert de Y et que $O = \bigcup_{p\geq 1} O_p = \bigcup_{p\geq 1} \overline{O_p}$.

2) Montrer que pour tout ouvert V de Y on a:

$$f^{-1}(V) \subset \bigcup_{N\in\mathbb{N}} (\bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}(V)) \subset f^{-1}(\overline{V}).$$

3) En déduire que pour tout ouvert O de Y différent de Y on a

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{p\geq 1} (\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}(O_p))$$

et que f est mesurable.

Exercice IV:

1) On considère des espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}_1$ telle que $\Omega_1 = \cup_{n\geq 1} A_n$, et une application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Montrer que f est mesurable ssi $\forall n \geq 1$ la restriction $f|_{A_n}$ de f à A_n est mesurable pour la tribu induite par $\mathcal{A}_1$ sur A_n.

2) Montrer que si Ω est un espace topologique, la tribu trace sur $A \subset \Omega$ de la tribu borélienne de Ω est la tribu borélienne de A.

3) Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue sauf en un nombre dénombrable de points est borélienne.

4) a) Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est borélienne.

b) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, p \wedge q = 1, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que f est borélienne.

5) a) Montrer que toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est borélienne.

b) Montrer qu'une fonction croissante sur une partie borélienne de $\mathbb{R}$ et nulle ailleurs est borélienne.

6) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est borélienne.

Exercice V:

Un σ-anneau de parties d'un ensemble E est une classe $\mathcal{C}$ telle que:
i) $\emptyset \in \mathcal{C}$.
ii) Si A et $B \in \mathcal{C}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{C}$ (*on dit que $\mathcal{C}$ stable par différence propre*).
iii) $\mathcal{C}$ est stable par les réunions dénombrables.

1) Montrer qu'un σ-anneau $\mathcal{C}$ est stable par les intersections dénombrables.
2) Montrer que pour toute classe $\mathcal{F}$ de parties de E, il existe un plus petit σ-anneau contenant $\mathcal{F}$.
3) Quel est le σ-anneau engendré par les singletons de E?
4) Si $\mathcal{C}$ est un σ-anneau, décrire la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Exercice VI: Variante du théorème de la classe monotone

"Soit E un ensemble et $\mathcal{C}$ une classe de parties de E contenant E et stable par intersections finies. Alors la plus petite classe contenant $\mathcal{C}$ stable par différence propre et limite croissante coïncide avec la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$ ".

Appelons $\overline{\mathcal{C}}$ la plus petite classe contenant $\mathcal{C}$ stable par différence et limite croissante.
1) Montrer que $\overline{\mathcal{C}}$ contient E et est stable par complémentation.
2) Soit $\mathcal{C}_1 = \{S \in \overline{\mathcal{C}} \mid \forall A \in \mathcal{C},\ S \cap A \in \overline{\mathcal{C}}\}$. Montrer que $\mathcal{C}_1 = \overline{\mathcal{C}}$. (*Indication: montrer que $\mathcal{C}_1$ est stable par différence propre et limite croissante et que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1$.*)
3) Soit $\mathcal{C}_2 = \{S \in \overline{\mathcal{C}} \mid \forall A \in \overline{\mathcal{C}},\ S \cap A \in \overline{\mathcal{C}}\}$. Montrer que $\mathcal{C}_2 = \overline{\mathcal{C}}$.
4) En déduire que $\overline{\mathcal{C}}$ est une tribu et que $\overline{\mathcal{C}} = \sigma(\mathcal{C})$.

Exercice VII:

Soit $E = (x_{ij})$ une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ indexée par l'ensemble $I \times J$; on a alors

$$\sup_i \{\sup_j x_{i,j}\} = \sup_j \{\sup_i x_{i,j}\},$$

c'est-à-dire que l'on peut intervertir l'ordre dans lequel on prend les bornes supérieures et le nombre ainsi obtenu est la borne supérieure de E soit $\sup \{x_{i,j}; (i,j) \in I \times J\}$.

(Un cas particulier est que si $(a_{n,m})$ est une suite double de nombre réels croissante en n et m alors $\lim_n \lim_m a_{n,m} = \lim_m \lim_n a_{n,m} = \sup \{a_{n,m} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$. Autrement dit, on peut intervertir les limites croissantes, alors qu'en général on ne peut pas intervertir deux limites.)

Exercice VIII:

Soient $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle **tribu produit** sur $X \times Y$ la tribu engendrée par les ensembles $A \times B$ où $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. Cette tribu est notée $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. *Remarquer que $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ et donc que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la tribu engendrée par les ensembles de type $A \times Y$ ou $X \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.*

1) Supposons que $\mathcal{A} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{B} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ sont des tribus engendrées par deux classes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ d'ensembles de X respectivement Y telles que $X \in \mathcal{E}, Y \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la tribu engendrée par les ensembles $A \times B$ où $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$. (*Indication: Si $\mathcal{D}$ est une tribu sur $X \times Y$, montrer d'abord que $\mathcal{C} = \{\ A \subset X \mid\ A \times Y \in \mathcal{D}\}$ est une tribu sur X.*)
2) En déduire qu'en particulier si X et Y sont des espaces topologiques alors $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$. En déduire que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3) Montrer que si $X = \mathbb{R}^p$ et Y est un espace topologique alors $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$. On peut démontrer, pour X, Y topologiques, que ce n'est pas toujours vrai.