Intégration et Probabilités 4

Exercice I

1) Si $(E, \mathcal{A}, m)$ est un espace mesuré et si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, la restriction de m à $\mathcal{B}$ est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$. Est-elle nécessairement bornée (resp. σ-finie) lorsque m est bornée (resp. σ-finie)?

2) Un sous-ensemble N de E est dit **m-négligeable** s'il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset B$ et $m(B) = 0$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties m-négligeables de E. Montrer que la classe $\overline{\mathcal{A}}$ des ensembles de la forme $A \cup N$ avec A dans $\mathcal{A}$ et N dans $\mathcal{N}$ est une tribu sur E qui contient $\mathcal{A}$ et qu'il existe une unique mesure $\overline{m} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ qui prolonge m, définie par

$$\overline{m}(A \cup N) = m(A) \text{ (pour } A \in \mathcal{A} \text{ et } \ N \in \mathcal{N}).$$

L'espace mesuré $(E, \overline{\mathcal{A}}, \overline{m})$ s'appelle **complété** de $(E, \mathcal{A}, m)$.

3) Soit f une application mesurable de l'espace mesuré $(E, \mathcal{A}, m)$ dans l'espace mesurable $(F, \mathcal{B})$. Montrer qu'on définit une mesure μ sur $\mathcal{B}$ en posant

$$\mu(B) = m(f^{-1}(B)).$$

Cette mesure s'appelle la **mesure image de** m **par** f et est notée $f(m)$. Est-ce que $f(m)$ est forcément bornée (resp. σ-finie) lorsque m est bornée (resp. σ-finie)? Est-ce que $f(m)$ est diffuse (i.e. ne charge aucun singleton) lorsque m est diffuse? Si m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$ calculer $f(m)$ (appelée **mesure de dénombrement** ou de **comptage**).

4) Construire un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$ non borné et de mesure de Lebesgue finie.

Exercice II

On considère l'intervalle $[0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ.

1) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O dense dans $[0, 1]$ tel que $\lambda(O) < \epsilon$.

2) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé d'intérieur vide F tel que $\lambda(F) > 1-\epsilon$. Existe-t-il un fermé d'intérieur vide de mesure de Lebesgue 1?

Exercice III Construction d'une partie non Lebesgue mesurable (donc non borélienne) sur $\mathbb{R}$

Cette construction repose sur l'axiome du choix. Etant donné une famille $(B_i)_{i \in I}$ de parties non vides et deux à deux disjointes de $\mathbb{R}$, on pourra dire qu'il existe une partie E de $\mathbb{R}$ qui contient un élément et un seul de chaque B_i.

1) Montrer qu'il existe une partie E de $[0, 1]$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in E, x - y \in \mathbb{Q}$. (*Regarder les classes d'équivalence sur* $[0, 1]$ *pour la relation* $x \sim y$ *ssi* $x - y \in \mathbb{Q}$.)

2) Soit S la réunion des ensembles $S_r = E + r$ où r décrit les rationnels de $[-1, 1]$. Montrer que $[0, 1] \subset S \subset [-1, 2]$ et que les ensembles S_r sont deux à deux disjoints.

3) Montrer que la mesure de Lebesgue λ est invariante par translation ($\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), E + r \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(E) = \lambda(E + r)$). En déduire que E n'admet pas de mesure de Lebesgue.

Exercice IV

Soit f_n et g_n deux suites de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ telles que $f_n = g_n$ μ-pp. A-t-on $\sup f_n = \sup g_n$, μ-pp?

Exercice V

On note λ la mesure de Lebesgue.

1) Quelles sont les fonctions continues sur $[0,1]$ nulles λ-pp. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace continues par boréliennes?

2) Peut-on comparer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues λ-pp et l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λ-pp égales à une fonction continue définie partout?

Exercice VI

Soient μ et ν deux mesures finies (c-à-d bornées) sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que pour tout intervalle borné $[a,b]$ on a $\mu([a,b]) = \nu([a,b])$.

1) Montrer que pour tout intervalle I on a $\mu(I) = \nu(I)$.

2) En déduire $\mu = \nu$, en utilisant le théorème de la classe monotone dans sa variante de l'exercice **VI**, feuille 3. (Essayer de retrouver de cette façon l'unicité de la mesure (de Lebesgue), sur $\mathbb{R}$, borélienne, invariante par translation et telle que la mesure de $[a,b]$ soit $b-a$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.)

Exercice VII Lemme de Borel-Cantelli

Si m est une mesure et (A_n) une suite d'ensembles mesurables tels que $\sum m(A_n) < \infty$, on a

$$m(\overline{\lim}\, A_n) = 0.$$

Exercice VIII

Si m est une probabilité sur $(E, \mathcal{A})$ et (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $m(A_n) = 1$ pour tout n, alors $m(\cap A_n) = 1$.

Exercice IX

Soit X un ensemble non dénombrable, par exemple $[0,1] \subset \mathbb{R}$. On munit X de la tribu $\mathcal{S}$ engendrée par les singletons, et $X \times X$ de la tribu produit $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$. Si $E \subset X \times X$, on note $E_x = \{y \in X \mid (x,y) \in E\}$ la section de E d'abscisse $x \in X$ et $E^y = \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$ la section de E d'ordonnée $y \in X$. Soit $\Delta \subset X \times X$ la diagonale. On veut montrer que Δ n'est pas mesurable, bien que les sections de Δ soient toutes mesurables.

1) Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des parties $E \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ telles que $E \cap \Delta$ est dénombrable, et $\{x \in X \mid E_x \text{ n'est pas dénombrable }\}$ est dénombrable. Montrer que $\mathcal{R}$ est un σ-anneau et que $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ où $\mathcal{R}'$ est l'ensemble des complémentaires des éléments de $\mathcal{R}$.

2) Conclure en remarquant que Δ n'appartient ni à $\mathcal{R}$ ni à $\mathcal{R}'$.

Exercice X

Soit $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par les singletons dans $\mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ mesurable. On note m la mesure définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ par $m(A) = 0$ si A est dénombrable et $m(A) = 1$ sinon. Montrer que f est m-presque sûrement constante. (*Indication : poser* $\alpha = \sup_{(} \{a \in \mathbb{R} | m(\{x|\ f(x) \leq a\}) = 0\}$).