Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 4 Supplément

Exercice 1.

1. Montrer que la suite des sommes partielles d'ordre impair (resp. pair) du développement en série entière, à l'origine, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ (resp. $x \mapsto \frac{x}{1+x}$) est croissante et que ces sommes sont positives ou nulles pour $x \in [0, 1[$.

2. Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \sum_0^\infty \frac{1}{(p+2n)(p+2n+1)} \quad (p > 0) \qquad \int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \sum_1^\infty \frac{1}{(p-2n)(p-2n+1)} \ (p < 1)$$

Exercice 2. Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

1. Montrer que : $\lim_{N\to\infty} \int f \mathbf{1}_{\{x||f(x)|>N\}} d\mu = 0$

2. Montrer que : $\forall \epsilon\, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int f \mathbf{1}_A d\mu \right| \leq \epsilon$.

Exercice 3. Montrer que, les intégrales d'une suite de fonctions uniformément convergente, sur un espace mesuré fini, convergent vers l'intégrale de la limite. Donner un exemple pour montrer que le résultat ne subsiste pas si l'on omet l'hypothèse de mesure finie.

Exercice 4. Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls telle que $S(x) = \sum a_n x^n$ converge dans $[0, 1[$. On sait que S est continue sur $[0, 1[$. Montrer que $\int_0^1 S(x)dx = \sum_1^\infty \frac{a_n}{1+n}$.
Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls décroissant vers 0 et soit $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\sigma(x) = \sum_0^\infty (-1)^n a_n x^n$. Montrer que σ est intégrable et que l'on a
$\int_0^1 \sigma(x)dx = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{a_n}{1+n}$.(Utiliser le lemme d'Abel).

Exercice 5. On considère la suiite de fonctions (boreliennes) définie sur $[0, 1]$ par
$f_n(x) = n - n^2 x$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.
Comparer $\int \lim f_n dx$ et $\lim \int f_n dx$. Expliquer.

Exercice 6. Soit $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable. On suppose que $c =_{\text{def}} \int f d\mu \in]0, \infty[$.
Soit (a_n) la suite définie par $a_n = \int n \ln(1 + (\frac{f}{n})^\alpha) d\mu \quad (\alpha > 0)$.
Montrer que la suite (a_n) converge vers $+\infty$, si $\alpha \in]0, 1[$ (utiliser Fatou), vers c, si $\alpha = 1$, et vers 0, si $\alpha > 1$. (On pourra montrer, dans ce dernier cas, que la fonction $u \mapsto \frac{\ln(1+u^\alpha)}{u}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.)
Ce résultat est souvent attribué à Laplace.

Exercice 7.

1. Montrer que la suite de terme général $a_n = \sum_1^n \frac{1}{k} - \ln n$ converge. On note c sa limite.

2. Montrer que l'on a :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^p (\ln x)^q \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n dx = \int_0^\infty x^p (\ln x)^q \exp(-x) dx \text{ pour tous } p > -1, q \in \mathbb{N}^*.$$
En déduire $\int_0^\infty \exp(-x) \ln x dx = c$. (*Indication* : intégrer par parties en choisissant une primitive convenable). On appelle c la constante d'Euler.

Exercice 8. Montrer que toute fonction Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}$ est égale presque partout à une fonction borélienne. (Commencer par le cas d'une fonction étagée).

Exercice 9. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de fonctions réelles sur E, contenant les constantes et stable par limite croissante. Soit $\mathcal{C}$ une classe de sous-ensembles de E stable par intersections finies.

1. Montrer que $\mathcal{M} = \{A \subset E \mid \mathbf{1}_A \in \mathcal{H}\}$ est une classe monotone.

2. On suppose que $\mathcal{H}$ contient les indicatrices des parties de $\mathcal{C}$. Montrer que $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{C})$-mesurables.

Exercice 10. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur E, contenant les constantes et tel que, si (f_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{H}$ dont la limite f est bornée, alors f est dans $\mathcal{H}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est stable par limite uniforme. Pour cela, on considère une suite (f_n) qui converge uniformément vers f et on pose $a_n = \|f_{n+1} - f_n\|$. On peut supposer (au moyen d'une suite extraite) que $\sum a_n < \infty$. On note b_n le reste d'ordre n de cette série. Considérer maintenant la suite $(g_n = f_n - b_n)$.

2. Soit $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ stable par produit. Montrer que, si $f_1 \dots f_n$ sont des éléments de $\mathcal{G}$ et Φ une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors $\Phi(f_1, \dots, f_n)$ est élément de $\mathcal{H}$. (Utiliser le théorème de Stone-Weierstrass).

3. En considérant la fonction $\Phi_r(x_1, \dots, x_n) = \Pi_{i=1}^d \inf(1, -r(x_i - a_i)^+)$ avec $r > 0$, montrer que l'indicatrice de $\{f_1 > a_1, \dots, f_n > a_n\}$ est dans $\mathcal{H}$.

4. Déduire de ce qui précède et de l'exercice 8. que $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions $\sigma(g \mid g \in \mathcal{G}\}$-mesurables bornées

En résumé : si $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur E, contenant les constantes et stable par limite croissante bornée et si $\mathcal{G}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}$ stable par produit, alors $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions $\sigma(g \mid g \in \mathcal{G}\}$-mesurables bornées. C'est une version fonctionnelle du théorème de classse monotone.