Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 5

Exercice I

On munit l'espace $\mathbb{R}^2$ de la tribu borélienne et d'une mesure μ telle que pour tout $r \in \mathbb{R}^{*+}$, les ensembles $\Omega_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}$ soient de mesure finie et $\mu(\Omega_r) = \pi.r^2$. On considère la fonction borélienne définie sur Ω_1 par $h(x,y) = x^2 + y^2$.

1) Construire une suite croissante (h_n) de fonctions étagées et invariantes par rotation qui converge vers h.

2) Calculer $\int_{\Omega_1} h_n d\mu$. En déduire la valeur de $\int_{\Omega_1} h d\mu$.

Exercice II

Soit $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1) Montrer que $\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \mu_i$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2) Montrer que pour f mesurable positive, puis pour f μ-intégrable que: $\displaystyle\int_\Omega f d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \int_\Omega f d\mu_i$.

3) Appliquer la question précédente lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mu_i = \delta_{x_i}$ (mesure de Dirac au point x_i).

Exercice III

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ des applications mesurables et positives. Démontrer que:

1) si l'intégrale $\displaystyle\int f d\mu < +\infty$ est finie, alors f est μ-pp finie (c-à-d $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$);

2) l'intégrale $\displaystyle\int f d\mu$ est nulle si et seulement si f est μ-pp nulle;

3) si $f = g$ μ-pp, alors $\displaystyle\int f d\mu = \int g d\mu$;

4) si f et g sont seulement mesurables, égales μ-pp , alors f est intégrable si et seulement si g l'est et dans ce cas $\displaystyle\int f d\mu = \int g d\mu$.

Exercice IV Intégration par rapport à une mesure-image

Soit $\phi : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B})$ une application mesurable.

1) Si $f : Y \to [0, +\infty]$ est mesurable, on a: $\displaystyle\int_Y f d(\phi(\mu)) = \int_X (f \circ \phi) d\mu$.

2) Si f est seulement mesurable alors $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(Y, \mathcal{B}, \phi(\mu))$ si et seulement si $f \circ \phi \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dans ce cas on a: $\displaystyle\int_Y f d(\phi(\mu)) = \int_X (f \circ \phi) d\mu$.

3) Application: Soit g une fonction intégrable sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Montrer que $\displaystyle\int_{[0,1]} g(t) d\lambda(t) = \int_{[0,1]} g(1-u) d\lambda(u)$.

Exercice V

Soit μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et f une application mesurable finie μ-presque partout. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

a) f est μ-intégrable.

b) $\displaystyle\int_{\{|f|>n\}} |f| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\mu(\{n < |f| \leq n+1\}) < +\infty$.

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mu(\{|f| > n\}) < +\infty$.

Exercice VI

Soit f une fonction mesurable positive sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On définit $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ par $\nu(A) = \int_A f d\mu := \int_\Omega f \cdot \mathbf{1}_A d\mu$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

1) Montrer que ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (la **mesure de densité f par rapport à μ**).

2) Montrer que si $g : \Omega \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable positive, $\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f d\mu$.

3) Montrer que si $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors g est ν-intégrable si et seulement si fg est μ-intégrable et dans ce cas, on a $\int_\Omega (fg) d\mu = \int_\Omega g d(\nu)$.

4) Montrer que tout ensemble N μ-négligeable est ν-négligeable (on dit que ν est **absolument continue** par rapport à μ est on note $\nu << \mu$.)

Exercice VII

Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose: $F(b) = \int_a^b f(x) d\lambda(x)$, avec la convention

$$\int_a^b f(x) d\lambda(x) = -\int_b^a f(x) d\lambda(x),$$

afin que la relation de Chasles (i.e. $F(b) - F(c) = \int_c^d f(x) d\lambda(x)$) soit satisfaite.

1) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si f est continue en b, alors F est dérivable en b.

3) Montrer, réciproquement, qu'une fonction de clazsse $\mathcal{C}^1$ est l'intégrale de sa dérivée.

Exercice VIII

Les fonctions suivantes sont elles Lebesgue-intégrables sur $\mathbb{R}$?

a) $x^2 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[0,1]}(x)$

b) $\begin{array}{lll} x, (x \neq 0) & \mapsto & 1/\sqrt{x}\mathbf{1}_{]0,1]}(x) \\ 0 & \mapsto & 100 \end{array}$

c) $\begin{array}{lll} x, (x \neq 0) & \mapsto & \sin(1/x) \\ 0 & \mapsto & 100 \end{array}$

Exercice IX

1) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a: $\int_{[0,n]} (1 - \frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} d\lambda(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} x^{\alpha-1} d\lambda(x)$.

2) Etudier $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n^2]} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-ax} d\lambda(x)$ dans les cas $a > 1$ et $a \leq 1$.

Exercice X

Etudier:

1) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx$.

2) $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$.

Exercice XI

On se place sur l'espace $E = [-1, 1]$ muni de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. On considère pour $n \geq 1$ la suite de fonctions définies sur E par $f_n(x) = n.\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}]}(x) - n.\mathbf{1}_{[-\frac{1}{n},0[}(x)$.

1) Montrer que (f_n) converge λ-pp vers une fonction f.

2) a) A-t-on: i) $\int_E f_n d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\lambda$? ii) $\int_E |f_n| d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E |f| d\lambda$?

iii) $\int_E |f_n - f| d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$? iv) $\forall A \in \mathcal{B}, \int_A f_n d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_A f d\lambda$?

b) Peut-on appliquer le théorème de Lebesgue (de convergence dominée)?