Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 5 Supplément

Exercice 1. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles ou complexes définies sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ et mesurables.

1. Montrer que la suite (f_n) converge presque partout vers f si et seulement si l'on a $\forall \epsilon > 0, m(\limsup(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0$.

2. Montrer qu'une condition suffisante pour la convergence ci-dessus est $\sum m(\{|f_n - f|\} > \epsilon) < \infty$ mais que cette condition n'est pas nécessaire.

Exercice 2. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, m)$, intégrables et convergeant presque partout vers f intégrable.

1. On suppose $f_n \geq 0$ pour tout n. Montrer que :
$$\int |f_n - f| dm \to 0 \Leftrightarrow \int f_n dm \to \int f dm.$$

2. Donner un exemple d'une suite (f_n) convergeant presque partout vers 0 telle que l'on ait $\int f_n dm = 0$ pour tout n et que $\int |f_n| dm$ ne tende pas vers 0. Comparer avec 1..

3. Montrer que, si l'on suppose m bornée :
$$\int |f_n - f| dm \to 0 \Leftrightarrow \int |f_n| dm \to \int |f| dm.$$
(Indication: montrer que $\int |f_n| dm \to \int |f| dm \Rightarrow \int ||f_n| - |f|| dm \mathbf{1}_{\sup |f_n| > p} dm \to 0$ et en déduire $\forall \epsilon\ \exists q\ \forall n \in \mathbb{N}, \int |f_n| \mathbf{1}_{\sup |f_n| \geq q} dm \leq \epsilon$.)

4. Montrer que $\int \big| |f_n| - |f| - |f_n - f| \big| dm \to 0$.

Exercice 3. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, m)$, mesurables et telles que $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ soient finies presque partout. Soient a_n des réels positifs ou nuls tels que $\sum a_n < \infty$. Montrer que la série $\sum a_n f_n$ converge presque partout.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m) \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On suppose que m est une probabilité.

1. Montrer que $\lim_{t\to 0, t\in\mathbb{R}} \int \frac{|1-tf|-1}{t} dm = \int \mathcal{R} f dm$.
2. En déduire $\forall z \in \mathbb{C}, \int |1+zf| dm \geq 1 \Rightarrow \int f dm = 0.$. La réciproque est fausse.

Exercice 5. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré fini et (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω telles que :

(i) $\exists C\ \forall n \displaystyle\int |f_n| dm \leq C$

ii) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n, m(A) \leq \delta \Rightarrow \displaystyle\int |f_n| \mathbf{1}_A dm \leq \epsilon.$

Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{p} \int \sup_{n\leq p} |f_n| dm \right) = 0.$

Exercice 6. Convergence en mesure.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré fini et (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω. On dit que la suite (f_n) converge en mesure vers la fonction f si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow m(\{|f_n - f| > \epsilon\}) < \epsilon.$$

1. Montrer que la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.
2. Montrer que si les f_n sont intégrables et si $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| dm = 0$, la suite (f_n) converge en mesure vers la fonction f.
3. Montrer que si la suite (f_n) converge en mesure vers la fonction f, alors elle possède une sous-suite qui converge presque partout vers f.
4. On suppose que la suite (f_n) converge presque partout vers f et :
   $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n, m(A) \leq \delta \Rightarrow \int |f_n| \mathbf{1}_A dm \leq \epsilon, \ \int |f| \mathbf{1}_A dm \leq \epsilon.$$
   Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| dm = 0$. Expliquer pourquoi ce résultat est une extension du théorème de convergence dominée.

Exercice 7. Inégalité de Jensen. On rappelle qu'une fonction $\phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ est convexe si :

$$\forall x, y \in]a,b[, \forall \lambda \in [0,1], \quad \phi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \phi(x) + (1-\lambda) \phi(y).$$

1. Montrer que ϕ est convexe si et seulement si :
   $$a < s < t < u < b \Rightarrow \tfrac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s} \leq \tfrac{\phi(u)-\phi(t)}{u-t}.$$
2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré où m est une probabilité. Pour toute $f : \Omega \to]a,b[$ mesurable et ϕ convexe, montrer que $\phi(\int f dm) \leq \int (\phi \circ f) dm$. (Indications : on pose $\beta = \sup_{a<s<t<b} \frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s}$. montrer que $\beta < \infty$ et que $\forall t, a < u < b \Rightarrow \phi(u) \geq \phi(t) + \beta(u-t)$. Poser alors $u = f(x)$ et intégrer.)